素因数分解問題とTFNPのサブクラス

手塚 真徹（東京科学大学）

田中 圭介（東京科学大学）

2025年5月13日
@CRESTクリプトマス 2025年度第1回全体会議
最終更新：2025年06月22日

目次

- 判定問題の計算量クラスと判定版素因数分解問題について
- 探索問題とクラスFNPについて
- クラスTFNPとそのサブクラスについて
- TFNPのサブクラスと探索版素因数分解問題について
- FACROOTMUL ∈ PWPPの証明[Jer16]について
- 暗号に関する探索問題とクラスPPP，PWPP
- FACROOT ∈ PPAの証明[Jer16]について
- TNFPの困難性と暗号技術について

判定問題の計算量クラスと判定版素因数分解問題について

判定問題

判定問題(Decision problem)

出力が1(Yes)，0(No)だけに限られる問題

判定問題の例：Composite

入力：自然数 n
出力：nが合成数なら1，そうでないならば0を出力する.

判定問題は言語 $L \subseteq \{0,1\}^*$ を用いて表すことができる.

$$L_{composite} = \{n \mid n\text{は合成数}\}$$

クラスPとクラスNP

クラスP

決定的多項式時間アルゴリズムで判定可能な言語 Lのクラス

クラスNP

答えが Yesである入力 x ($x \in L$)に対し，答えがYesであることを
証拠 y (witness)を用いて多項式時間で検証できる言語のクラス

より正確には,

言語 L がNPに属するとは，ある多項式時間検証可能な関係Rが存在して,

$x \in L \quad \Leftrightarrow \quad$ ある $y \in \{0,1\}^{poly(|x|)}$ が存在して $R(x,y) = 1$を満たすこと.

判定問題の例

クラスPにもNPにも属する言語の判定問題

Composite

入力：自然数 $n \geq 2$
出力：nが合成数なら1，そうでないならば0を出力

NPに属する言語の判定問題

INTEGER FACTORIZATION

入力：(n, k)
出力：nを割り切るk 以下の非自明な因子aがあれば1を出力
そうでないならば0を出力

nを割り切る非自明な因子とは
nを割り切る1とn以外の正の整数のこと.

判定問題の多項式時間帰着とNP完全問題

探索問題の多項式時間帰着 f

問題Aの入力を問題Bの入力に変換する.

- f は多項式時間で計算できる.
- x が問題AのYes入力　⇔　$f(x)$ が問題AのYes入力

問題PがNP完全問題

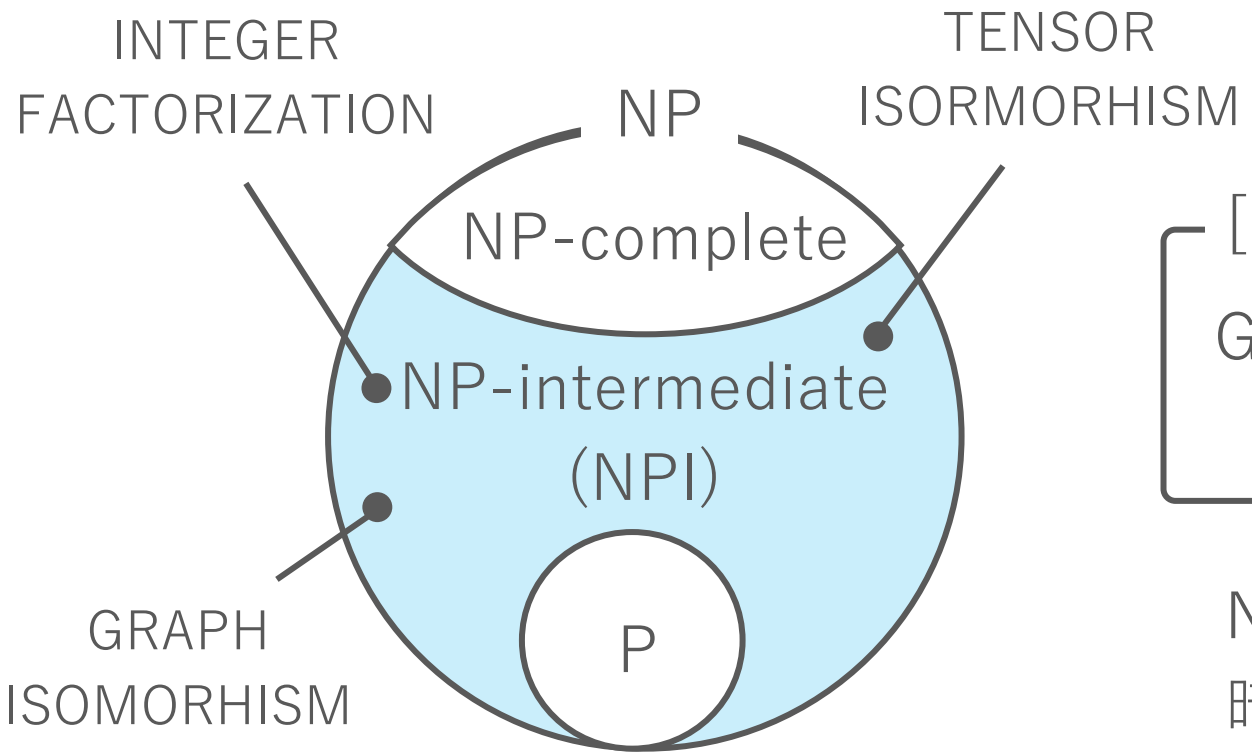
- すべてのNP問題が問題Pに多項式時間帰着する.（NP困難）
- 問題PがNP問題である.

NP完全問題はクラスNPに属する言語の判定問題の中で最も難しい.

判定版素因数分解問題の属する計算量クラス

素因数分解の判定問題 INTEGER FACTORIZATION はクラスNPに属する.

INTEGER FACTORIZATIONはNP問題だが,
クラスPの問題に属さず，NP完全問題にも属さない．(NP-intermediate)



[BHZ87]

GRAPH ISOMORHISMがNP完全問題
⇒ 多項式階層PHが崩壊する

NP-intermediateの問題をベースに
暗号方式が考案された例あり.

探索問題とクラスFNPについて

次の問題はクラスNPに属する?

FULLFAC

入力：自然数 $n \geq 2$

出力：n の素因数分解

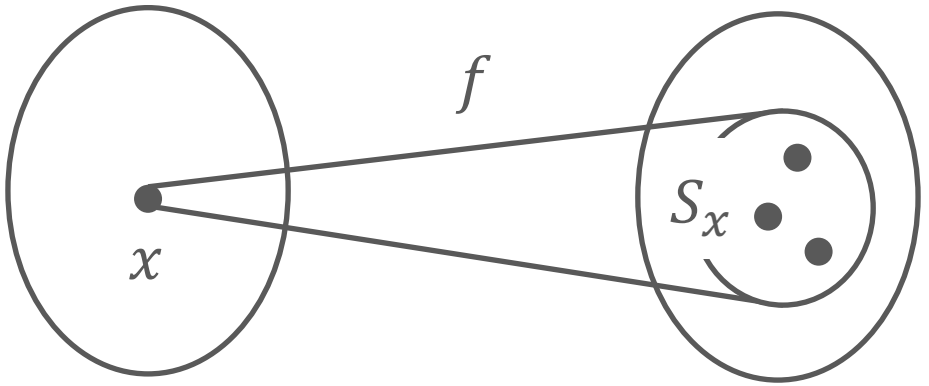
この問題はクラスNPか？

答えはNo!

クラスNPの問題の出力は0か1の2択のみであり，
FULLFACの出力とは異なる．

この問題を捉えるためには，判定問題からのクラス拡張が必要である．

関数問題



多価関数 f
入力 $x \in \Sigma^*$ から集合 $S_x \subseteq \Sigma^*$を定める.

関数問題 f
入力 $x \in \Sigma^*$ 対して $y \in S_x = f(x)$を計算する問題のこと.

関数 fを一価に制限し，集合 S_xを $\{0,1\}$ に制限すれば判定問題を捉える.

関数 f を一価に制限し， $f(x)$を解の個数とすれば,
解の数え上げ問題を捉えることができる.

クラスFNP

NP言語Lに関連する関数問題 fを定義したい.

言語LがNPに属するとは，ある多項式時間検証可能な関係R_Lが存在して,

$x \in L$ $\Leftrightarrow$ ある証拠 $y \in \{0,1\}^{poly(|x|)}$ が存在して $R_L(x,y) = 1$を満たす.

fを証拠(多価)関数として次のように定義する.

$$f(x) := \begin{cases} R_L(x,y) = 1 \text{ となる多項式長の証拠 } y\text{の集合} & x \in L \\ \text{"No"} & x \notin L \end{cases}$$

クラスFunction NP (FNP) はNP言語に対する証拠関数 f全体の関数クラス.

FNPに属する関数問題のみ扱うので,
以降，関数問題を単に探索問題と呼ぶことにします.

FNPに属する探索問題の例

FULLFAC

$$R = \{(n, n\text{の素因数分解}) | n \geq 2\}$$

入力：自然数 $n \geq 2$

出力：n の素因数分解（因子のリスト）

FACTORING

$$R = \{(n, n\text{を割り切る非自明な因子}) | n \geq 2\}$$

入力：自然数 $n \geq 2$

出力：nを割り切る非自明な因子 a があれば a を出力

そうでないならば ”No” を出力

FNP完全問題

問題AがFNP完全問題

- すべてのFNPに属する問題が問題Aに多項式時間帰着する．（FNP困難）
- 問題AがFNPに属する．

FNP完全問題の例

FSAT　入力：論理式 ϕ
出力：ϕ が充足可能であれば，充足割り当てを出力
そうでないならば ”No” を出力

FULLFAC，FACTORINGともにFNP完全問題ではなさそう．

これらの問題を捉えるFNPのサブクラスは？

クラスTFNPとそのサブクラスについて

FNPのサブクラスTFNP[MP91]

探索問題Π_R がクラスTFNPであるとは.

すべての入力 $x \in \Sigma^*$ に対して，必ず$R(x,y)=1$となる$y \in \Sigma^*$が必ず存在する.

TFNPに属さない問題の例

FACTORING　入力：自然数 $n \geq 2$
出力： nを割り切る非自明な因子 a があれば a を出力
そうでないならば ”No” を出力

TFNPに属する問題の例

FULLFAC　入力：自然数 $n \geq 2$
出力：n の素因数分解（因子のリスト）

クラスTFNPには完全問題が存在するのか？

TFNPは完全問題をもたないと信じられている.

$$NP \neq coNP \quad \Leftrightarrow \quad \text{TFNPに完全問題が存在しない} \quad [MP91]$$

※ NP ≠ coNP は重要な未解決問題

NP ≠ coNP が成り立つなら P ≠ NP が成り立つ.

NP ≠ coNP の証明は P ≠ NP を証明すること以上に難しい！

完全問題をもつTFNPのサブクラスを導入することにより,
TFNPの問題の計算複雑性を詳細に捉える研究が行われている.

補足： クラスco-NP

言語 L がco-NPに属するとは，補言語 $\bar{L} \in$ NP を満たすこと.

クラスco-NPの言語の例（ co-NP完全問題）

$$L_{tautorogy} = \{\text{論理式 } \varphi \mid \varphi \text{は恒真}\}$$

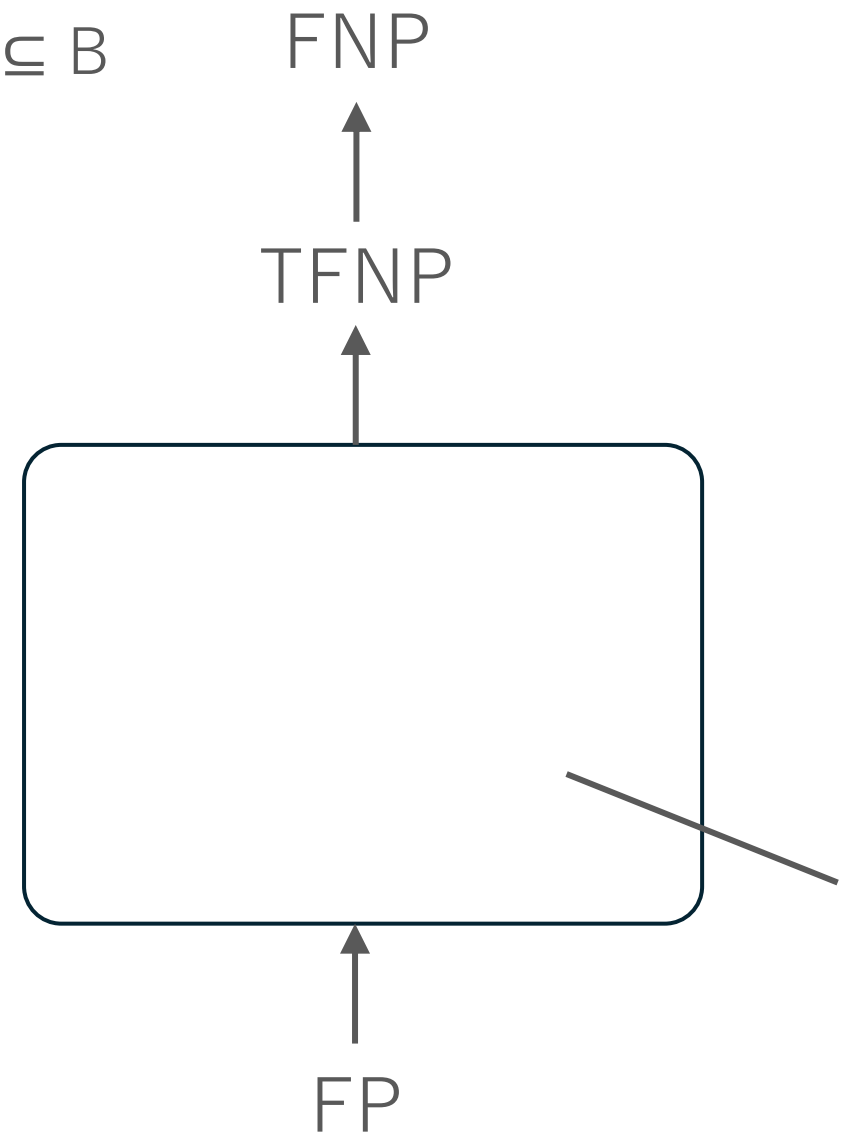
φが恒真であるとは，どの変数割り当てでもφが充足される.

補言語 $\bar{L}_{tautorogy} = \{\text{論理式 } \varphi \mid \varphi \text{を充足しない変数割り当てが存在}\} \in$ NP
であるので，$L_{tautorogy} \in$ co-NPに属する.

NP = coNP なら,
論理式 φ が恒真であることの証拠が多項式長で与えられることになる.

TNFPサブクラスの包含関係

A→B：A ⊆ B



FNP：Function NP

TFNP： Total Function NP

FP：Function P

クラスFP

多項式時間で解くことができる
TFNPに属する関数問題 f のクラス

この部分に存在するサブクラスは
たくさんあります．．．

TFNPのサブクラス

PLS：Polynomial Local Search [JPY85]

SOPL：Sink-Of-Potential-Line [GKRS19]

PPA：Polynomial Parity Arguments on graphs [Pap94]

PPADS：Polynomial Parity Arguments on Directed graphs, Sinks [Pap94]

PPAD：Polynomial Parity Arguments on Directed graphs [Pap94]

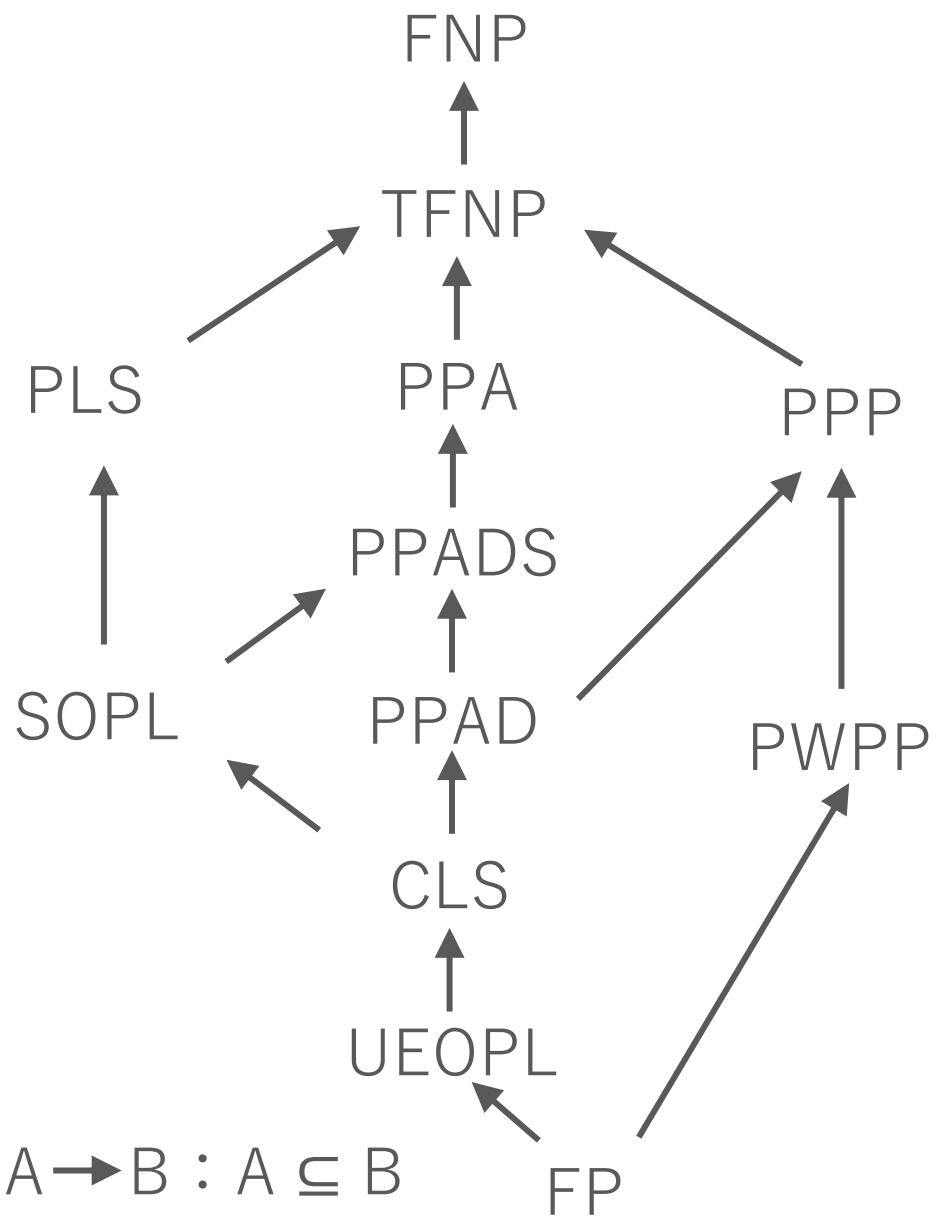
CLS：Continuous Local Search [DP11]

UEOPL：Unique End-Of-Potential-Line [FGMS19]

PPP：Polynomial Pigeonhole Principle [Pap94]

PWPP：Polynomial Weak Pigeonhole Principle [Jer16]

TFNPサブクラスの包含関係



PLS：Polynomial Local Search

SOPL：Sink-Of-Potential-Line

PPA：Polynomial Parity Arguments on graphs

PPADS：Polynomial Parity Arguments on Directed graphs, Sinks

PPAD：Polynomial Parity Arguments on Directed graphs

CLS：Continuous Local Search

UEOPL：Unique End-Of-Potential-Line

PPP：Polynomial Pigeonhole Principle

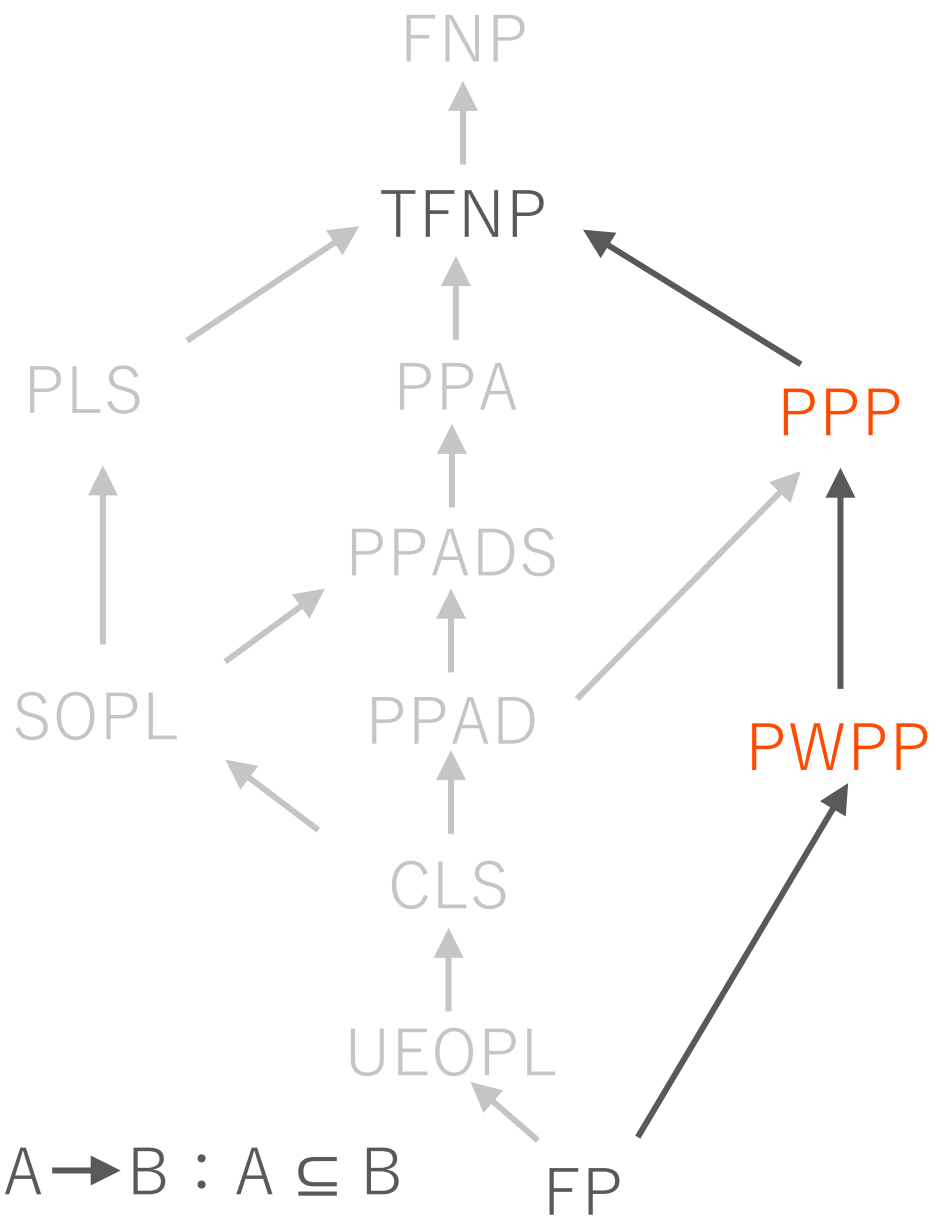
PWPP：Polynomial Weak Pigeonhole Principle

最近の結果

$CLS = PLS \cap PPAD$ [FGHS21](STOC21)

$SOPL = PLS \cap PPADS$ [GHJ+22] (CCC22)

サブクラスPPPとPWPP



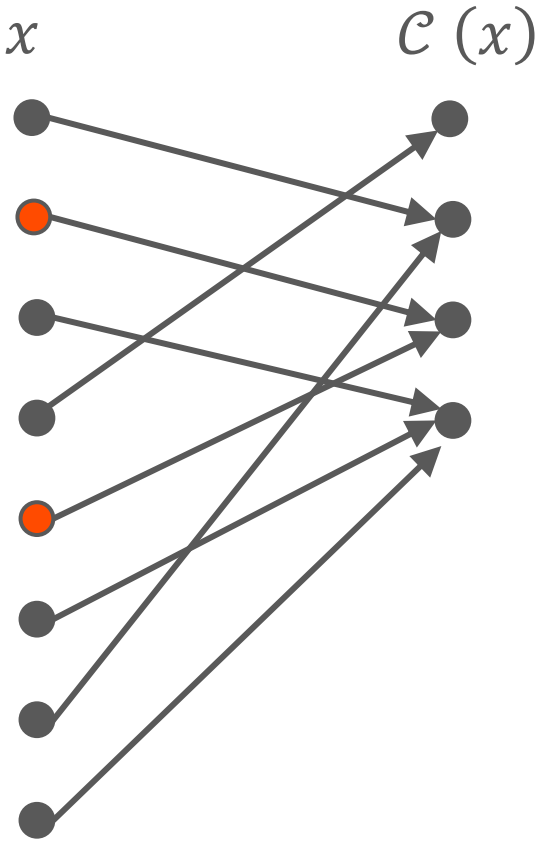
PWPPとPPPは最悪ケースの
ハッシュ関数の衝突困難性を捉える
探索問題計算量クラス.

COLLISION問題とクラスPWPP[Jer16]

COLLISION問題

入力：回路 $\mathcal{C}$: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^{n-1}$ s.t. $|\mathcal{C}|$=poly(n),

出力：(x, x') s.t. $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(x')$ かつ $x \neq x'$



探索問題PがPWPPに属するとは，問題PがCOLLISION問題に多項式時間帰着できる.

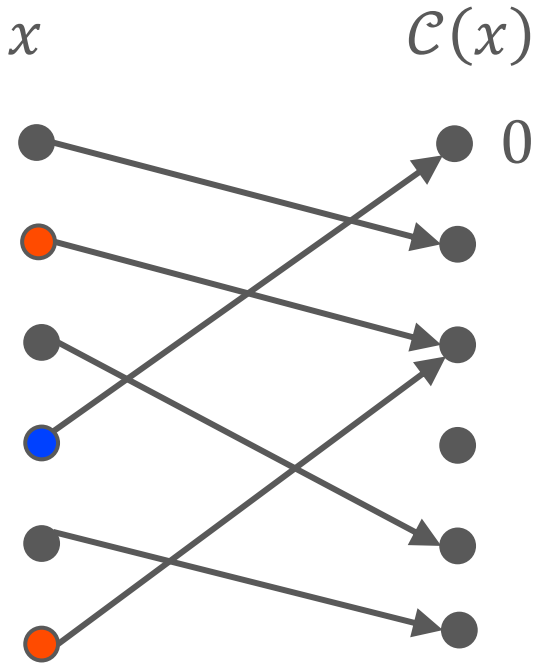
クラスはPWPPはハッシュ関数の衝突困難性を捉えることができる計算量クラス

PIGEONHOLE CIRCUIT問題とクラスPPP

PIGONHOLE CIRCUIT問題

入力：回路 $\mathcal{C}$: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ s.t. $|\mathcal{C}|$=poly(n)

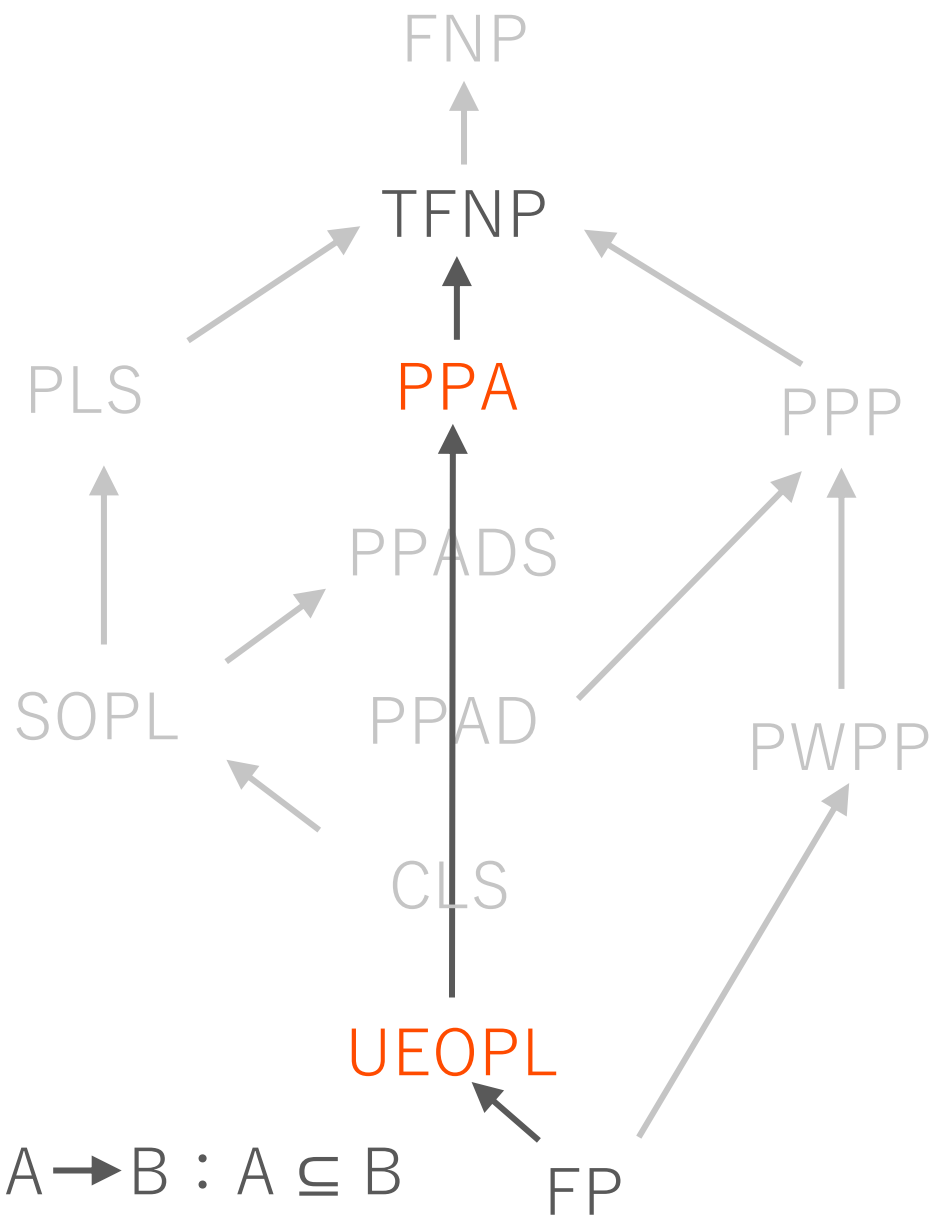
出力：x, s.t. $\mathcal{C}(x) = 0$または (x, x') s.t. $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(x')$ かつ $x \neq x'$



探索問題PがPPPに属するとは，
問題Pが PIGEONHOLE CIRCUIT問題に
多項式時間帰着できる．

クラスはPPPは置換の一方向性を
捉えることができる計算量クラス

TNFPサブクラスの包含関係



クラスPPA，UEOPLを説明する．

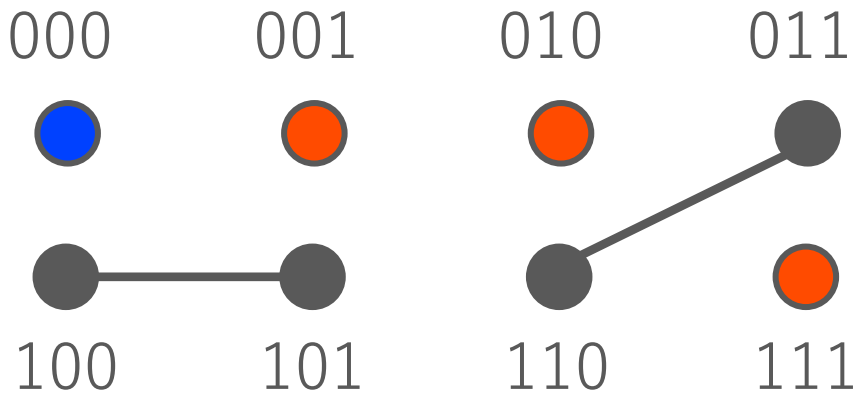
LONELY問題[BCE+95]とクラスPPA[Pap94]

LONELY　入力：無向グラフ$G=(V,E)$ を表す回路 $\mathcal{C}_{lon}:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$,

$|\mathcal{C}_{lon}|$=poly(n), $V=\{0,1\}^n \setminus \{0^n\}$,

$(u,v)\in E$ iff $u\neq v \wedge \mathcal{C}_{lon}(u)=v \wedge \mathcal{C}_{lon}(v)=u$

出力： 0^n 以外のマッチングがない頂点



$\mathcal{C}_{lon}(100)=101$,　$\mathcal{C}_{lon}(101)=100$

$\mathcal{C}_{lon}(001)=101$,　$\mathcal{C}_{lon}(111)=111$

頂点100 と101 はマッチする

頂点101 と101 はマッチしない

探索問題PがクラスPPAに属するとは,

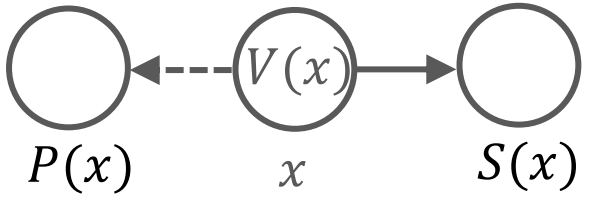
問題PからLONELY問題への
多項式時間帰着が存在する.

UEOPL問題[FGMS19]

UIQUE-END-OF-POTENTIAL-LINE (UEOPL)

入力：回路 $P, S: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ s.t. $P(0^n) = 0^n, \ \ S(0^n) \neq 0^n$

回路 $V: \{0,1\}^n \to \{0,1,\dots,2^m - 1\}$ s.t. $\mathrm{V}(0^n) = 0^n$



出力：次のうちいずれかを出力

Ⅰ　x s.t. $P\big(S(x)\big) \neq x$

Ⅱ　x s.t. $S(x) \neq x, \ \ P\big(S(x)\big) = x, \ \ V(x) \geq V(S(x))$

Ⅲ　x s.t. $S\big(P(x)\big) \neq x, \ \ x \neq 0^n$

Ⅳ　(x, y) s.t. $x \neq y, \quad S(x) \neq x, \quad S(y) \neq y, \quad V(x) = V(y)$

Ⅴ　(x, y) s.t. $x \neq y, \quad S(x) \neq x, \quad S(y) \neq y, \quad V(x) < V(y) < V(S(x))$

探索問題PがクラスUEOPLに属するとは,

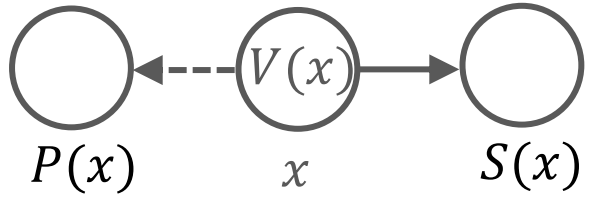
問題PからUEOPL問題への多項式時間帰着が存在する.

UEOPL問題[FGMS19]

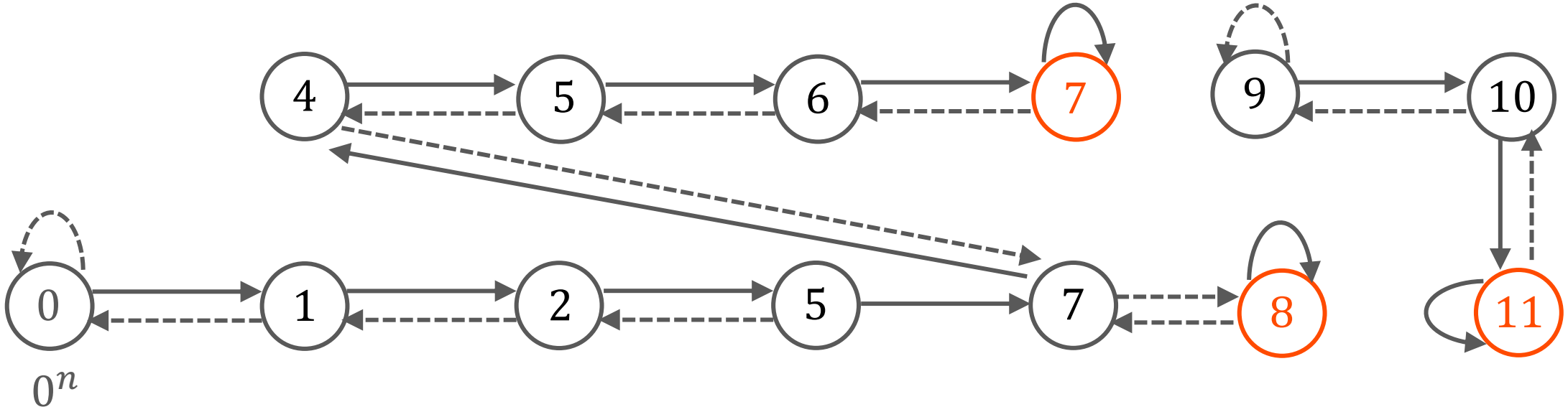
UIQUE-END-OF-POTENTIAL-LINE (UEOPL)

入力：回路 $P, S: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ s.t. $P(0^n) = 0^n$, $S(0^n) \neq 0^n$

回路 $V: \{0,1\}^n \to \{0,1,\ldots,2^m - 1\}$ s.t. $V(0^n) = 0^n$



出力： I x s.t. $P(S(x)) \neq x$

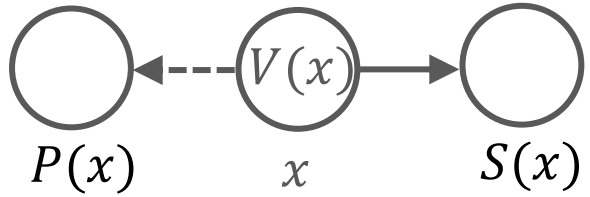


UEOPL問題[FGMS19]

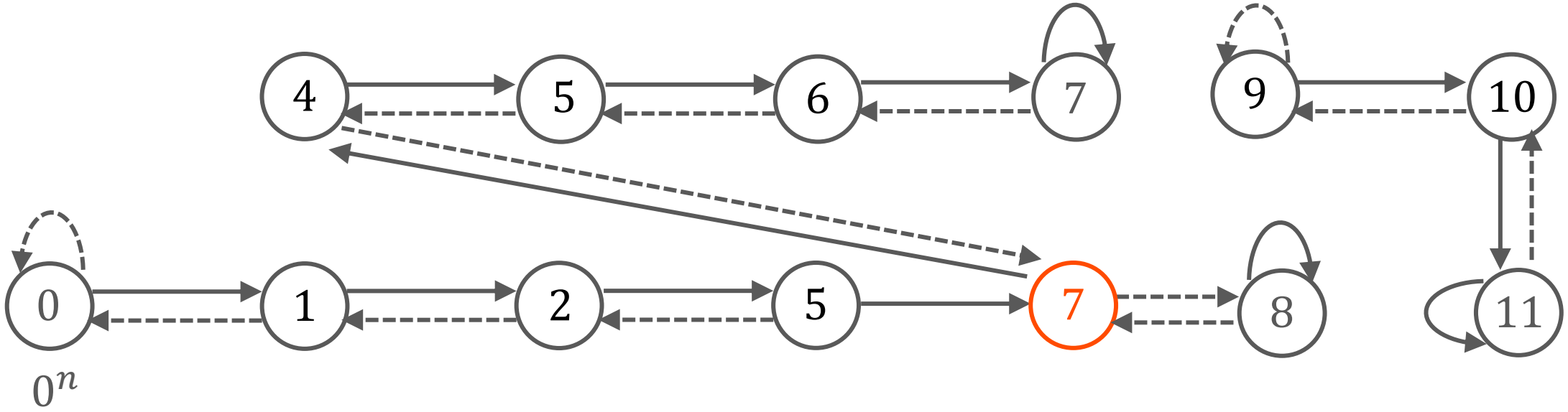
UIQUE-END-OF-POTENTIAL-LINE (UEOPL)

入力：回路 $P, S: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ s.t. $P(0^n) = 0^n$, $S(0^n) \neq 0^n$

回路 $V: \{0,1\}^n \to \{0,1,\ldots,2^m - 1\}$ s.t. $V(0^n) = 0^n$



出力：II　x s.t. $S(x) \neq x$, $P(S(x)) = x$, $V(x) \geq V(S(x))$

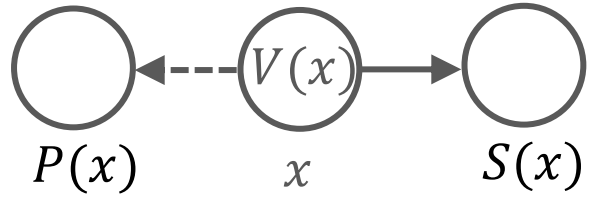


UEOPL問題[FGMS19]

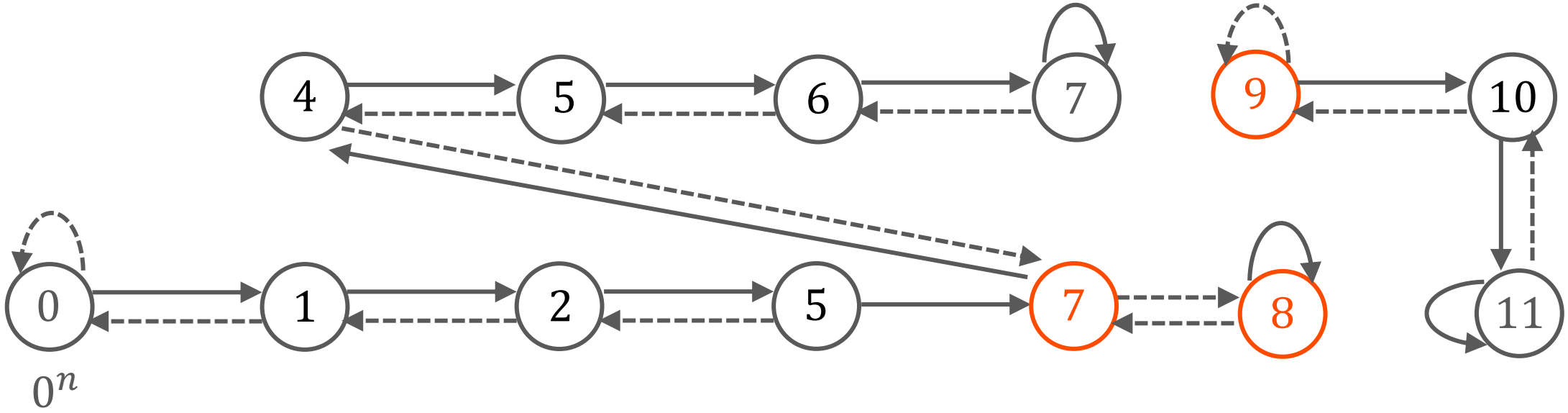
UIQUE-END-OF-POTENTIAL-LINE (UEOPL)

入力：回路 $P, S: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ s.t. $P(0^n) = 0^n, \quad S(0^n) \neq 0^n$

回路 $V: \{0,1\}^n \to \{0,1,\ldots,2^m - 1\}$ s.t. $\mathrm{V}(0^n) = 0^n$



出力： III x s.t. $S\big(P(x)\big) \neq x, \quad x \neq 0^n$

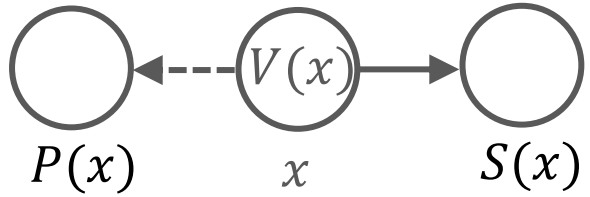


UEOPL問題[FGMS19]

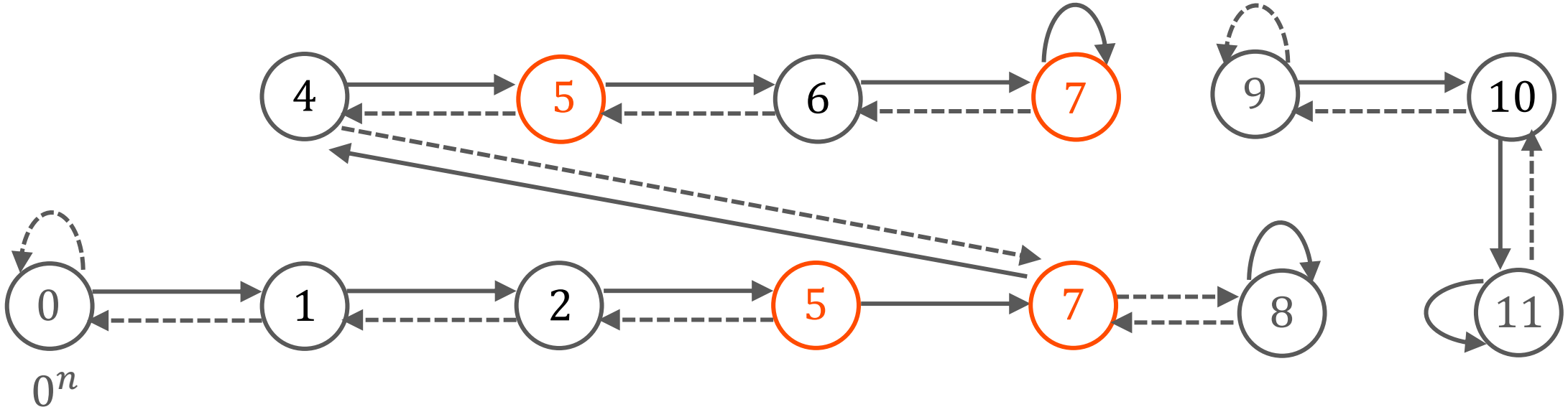
UIQUE-END-OF-POTENTIAL-LINE (UEOPL)

入力：回路 $P, S: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ s.t. $P(0^n) = 0^n, \quad S(0^n) \neq 0^n$

回路 $V: \{0,1\}^n \to \{0,1,\ldots,2^m - 1\}$ s.t. $\mathrm{V}(0^n) = 0^n$



出力： IV (x, y) s.t. $x \neq y, \quad S(x) \neq x, \quad S(y) \neq y, \quad V(x) = V(y)$

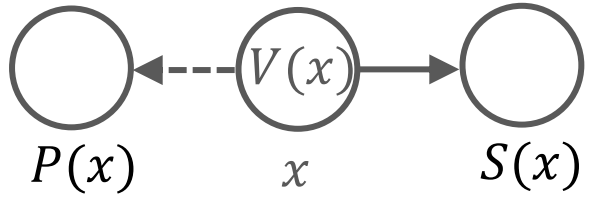


UEOPL問題[FGMS19]

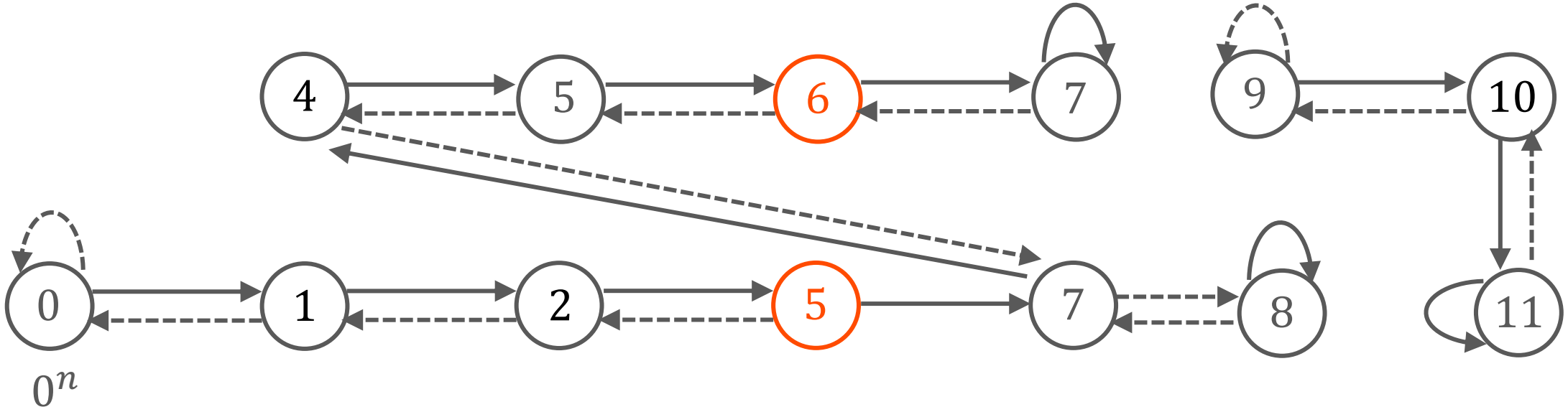
UIQUE-END-OF-POTENTIAL-LINE (UEOPL)

入力：回路 $P, S: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ s.t. $P(0^n) = 0^n, \quad S(0^n) \neq 0^n$

回路 $V: \{0,1\}^n \to \{0,1,\ldots,2^m - 1\}$ s.t. $\mathrm{V}(0^n) = 0^n$



出力： V (x, y) s.t. $x \neq y, \quad S(x) \neq x, \quad S(y) \neq y, \quad V(x) < V(y) < V(S(x))$

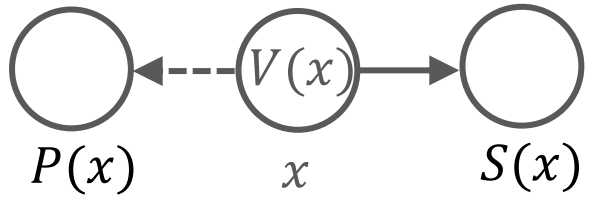


UEOPL問題とクラスUEOPL[FGMS19]

UIQUE-END-OF-POTENTIAL-LINE (UEOPL)

入力：回路 $P, S: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ s.t. $P(0^n) = 0^n, \ \ S(0^n) \neq 0^n$

回路 $V: \{0,1\}^n \to \{0,1,\dots,2^m - 1\}$ s.t. $\mathrm{V}(0^n) = 0^n$



出力：次のうちいずれかを出力

Ⅰ　x s.t. $P\big(S(x)\big) \neq x$

Ⅱ　x s.t. $S(x) \neq x, \ \ P\big(S(x)\big) = x, \ \ V(x) \geq V(S(x))$

Ⅲ　x s.t. $S\big(P(x)\big) \neq x, \ \ x \neq 0^n$

Ⅳ　(x, y) s.t. $x \neq y, \quad S(x) \neq x, \quad S(y) \neq y, \quad V(x) = V(y)$

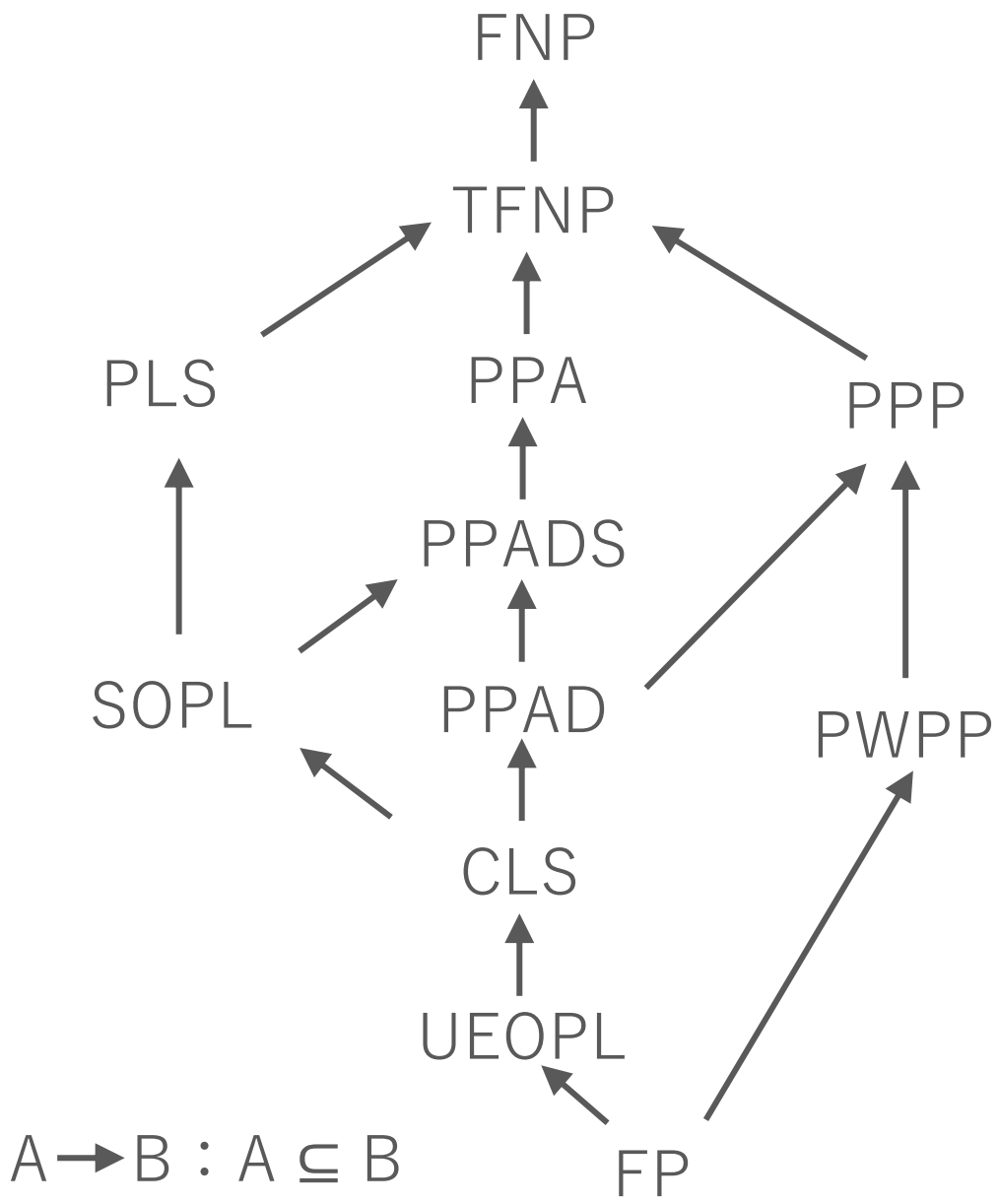
Ⅴ　(x, y) s.t. $x \neq y, \quad S(x) \neq x, \quad S(y) \neq y, \quad V(x) < V(y) < V(S(x))$

探索問題Pがクラス UEOPLに属するとは,

問題PからUEOPL問題への多項式時間帰着が存在する.

TFNPのサブクラスと探索版素因数分解問題について

素因数分解問題はどのサブクラスに属するか？



探索版素因数分解問題のバリエーション

FACTORING $\notin$ TFNP

入力：自然数 $n \geq 2$

出力：nを割り切る非自明な因子 a があれば a を出力

そうでないならば ”No” を出力

C-FACTORING $\in$ TFNP

入力：合成数 n

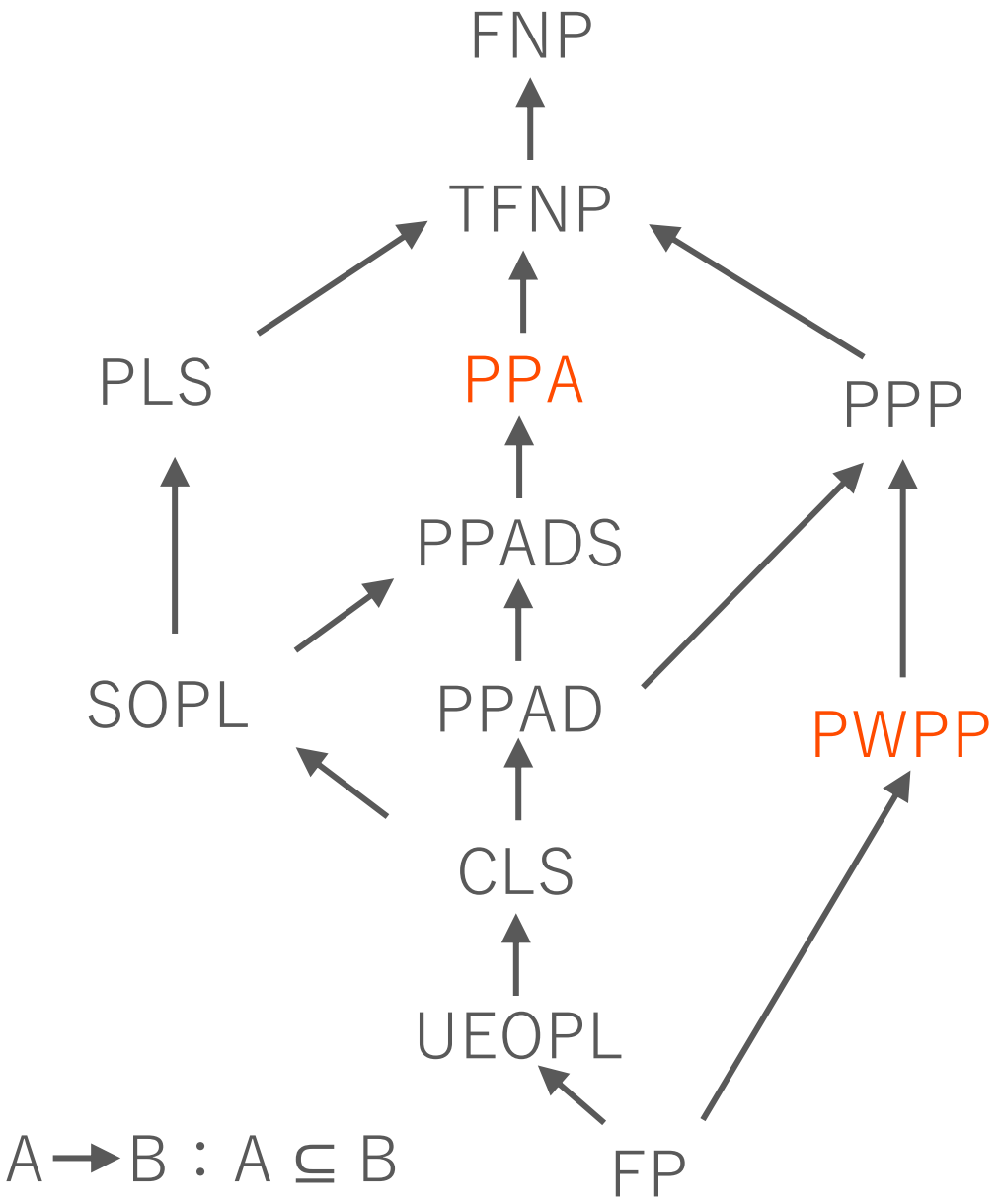
出力：nを割り切る非自明な因子a を出力

FULLFAC $\in$ TFNP

入力：自然数 $n \geq 2$

出力：n の素因数分解（因子のリスト）

素因数分解問題の計算量クラス



[Jer16]

一般化されたリーマン予想GRHのもとで

C-FACTORING ∈ PWPP ∩ PPA

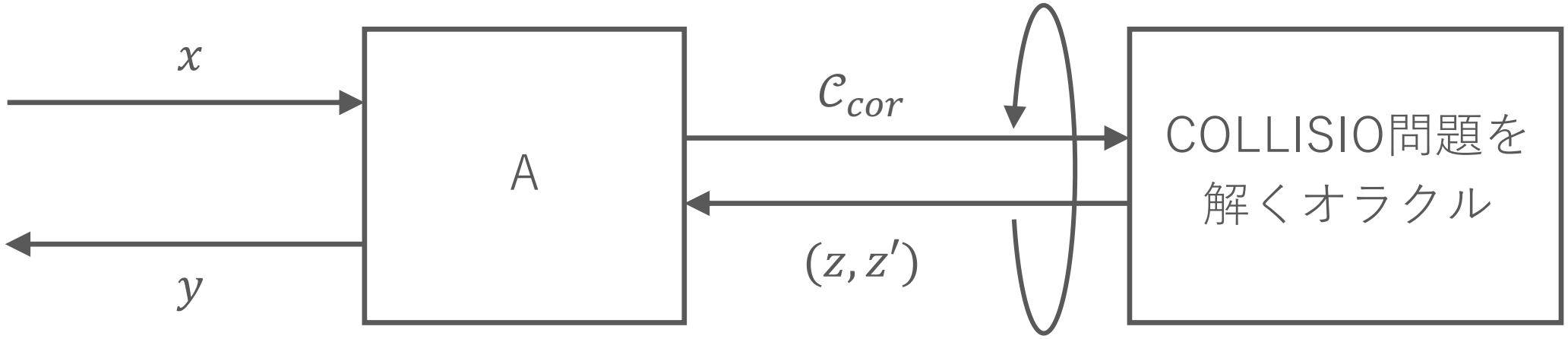
FULLFAC ∈ FP^{PWPP}

補足： $\mathrm{FP}^{\mathrm{PWPP}}$

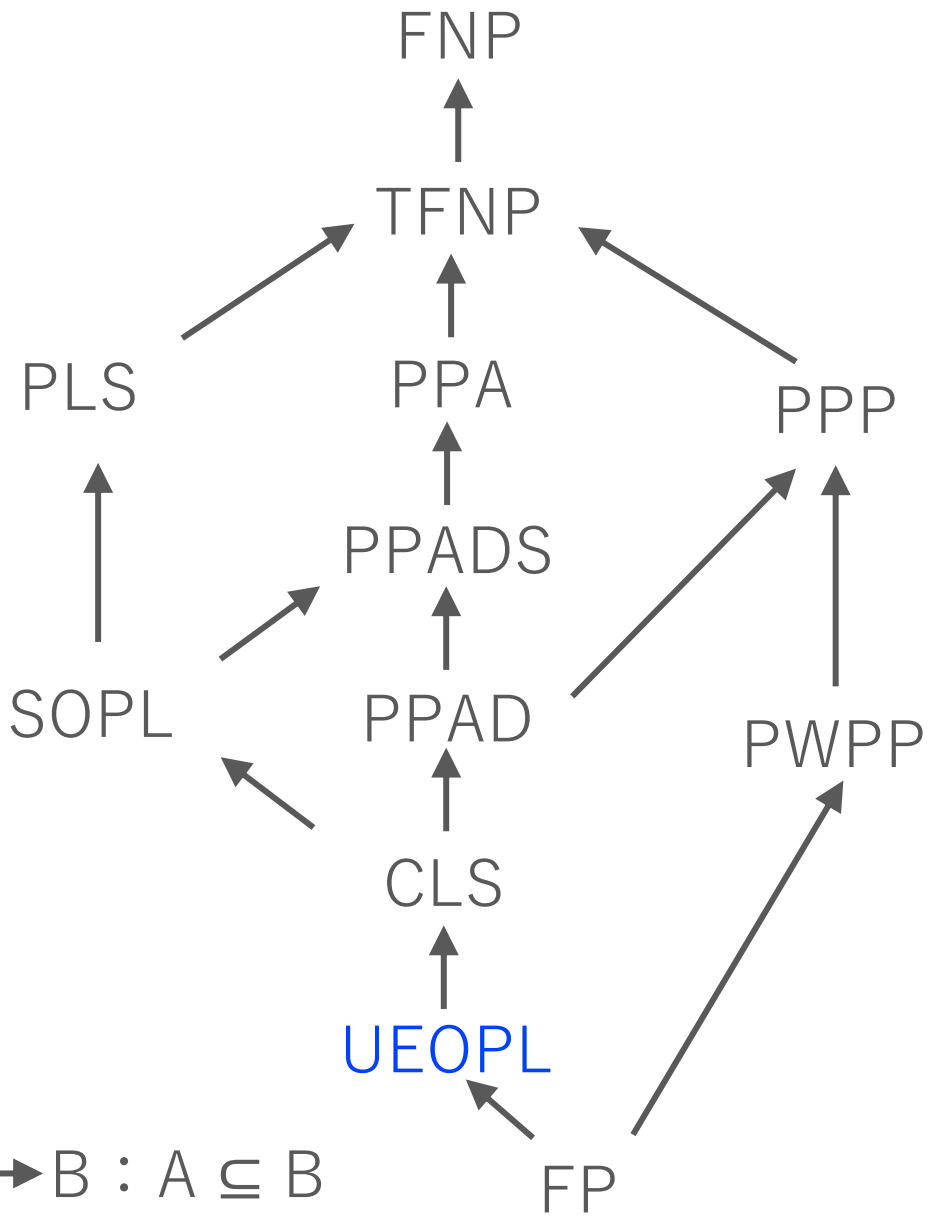
探索問題$P \in \mathrm{FP}^{\mathrm{PWPP}}$とは，次の条件を満たす
多項式時間オラクルアルゴリズムAが存在すること.

条件

オラクルはCOLLISION問題の回路$\mathcal{C}_{cor}$を受け取り，
$\mathcal{C}_{cor}(z) = \mathcal{C}_{cor}(z')$ かつ $z \neq z'$ となる(z, z') を出力する.



素因数分解問題の計算量クラス



A→B：A ⊆ B

[Jer16]

一般化されたリーマン予想GRHのもとで

C-FACTORING ∈ PWPP ∩ PPA

FULLFAC ∈ FP^{PWPP}

[HMR23]

FULLFACが

downward self-reducible であれば

FULLFAC ∈ UEOPL

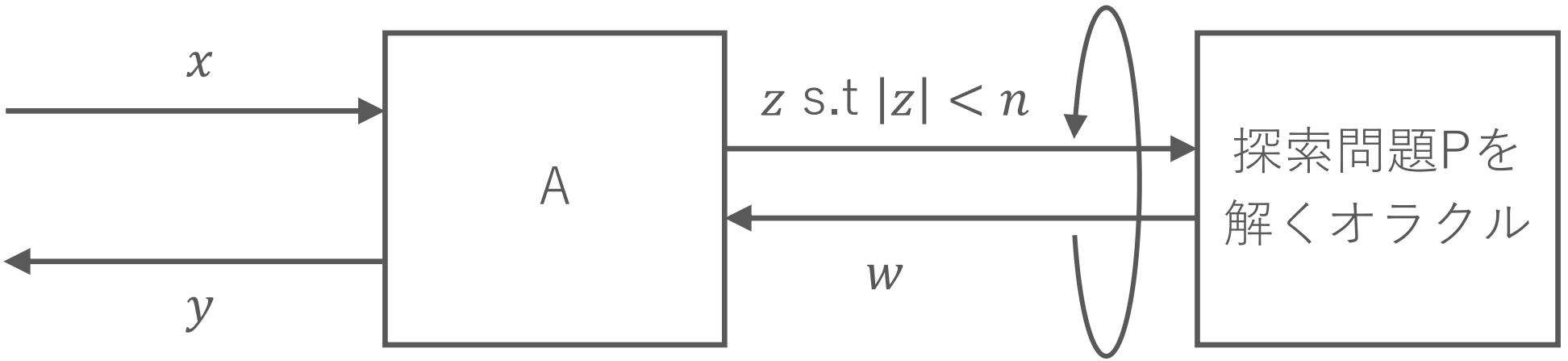
※FULLFACが

downward self-reducibleであるかは未解決

補足：Downward Self-Reducible

探索問題Pがdownward self-reducibleとは，次の条件を満たす
多項式時間オラクルアルゴリズムAが存在すること.

条件
① オラクルは探索問題Pを解く.
② Aに与えられるインスタンス $x \in \{0,1\}^n$ に対し，
オラクルにクエリできる入力長は n 未満である.



[HMR23]の結果概要

クラスTFUP

TFNPの問題で入力 x に対し，解が唯一つの問題のクラス

主な結果

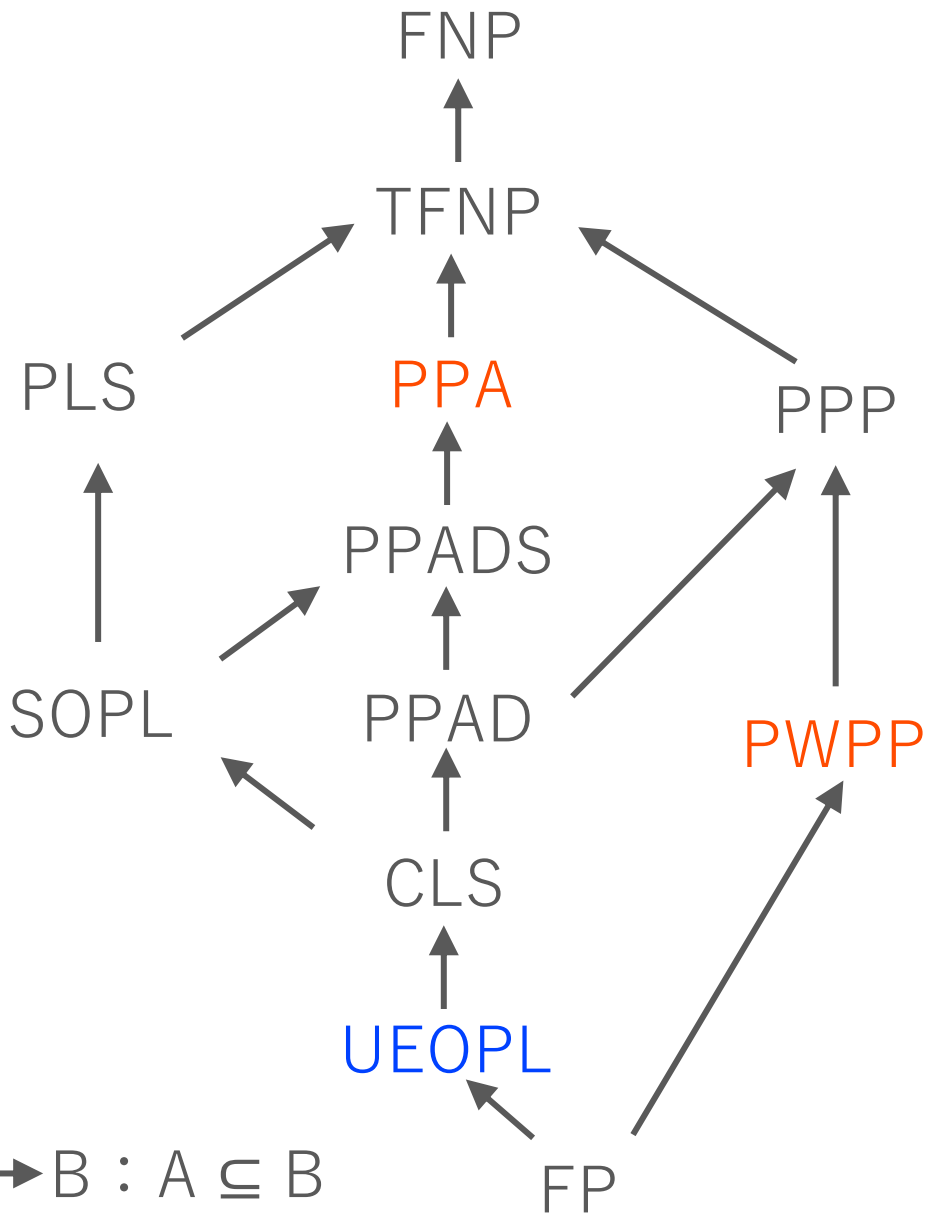
① TFNPの問題PがDownward self-reducibleであれば，
その問題PはPLSに属する

② TFUPの問題PがDownward self-reducibleであれば，
その問題PはUEOPLに属する

⬇

FULLFAC ∈ TFUPなので，
FULLFAC がDownward self-reducibleであれば，FULLFAC ∈ UEOPLTFUP

素因数分解問題の計算量クラス



A→B：A ⊆ B

[Jer16]

一般化されたリーマン予想GRHのもとで

C-FACTORING ∈ PWPP ∩ PPA

FULLFAC ∈ FP^{PWPP}

[HMR23]

FULLFACが

downward self-reducible であれば

FULLFAC ∈ UEOPL

※FULLFACが

downward self-reducibleであるかは未解決

FACROOTMUL ∈ PWPP の証明[Jer16]について

探索版素因数分解問題とその変種

C-FACTORING　入力：合成数 n
出力：n の非自明因子

ヤコビ記号 $(a|n)$

WEAKFACROOT　入力：奇数 n，a, b s.t. $(a|n) = 1$，$(b|n) = -1$
出力：n の非自明因子 or a の平方根

FACROOTMUL　入力：奇数 n，a, b s.t. $(a|n) = 1$，$(b|n) = -1$
出力：n の非自明因子 or a の平方根
or b の平方根 or ab の平方根

FACROOT　入力：奇数 n，a s.t. $(a|n) = 1$
出力：n の非自明因子 or a の平方根≈

補足：ルジャンドル記号とヤコビ記号

ルジャンドル記号　　p：3以上の素数，a：整数

$$(a|p) = \begin{cases} 0 & a = 0 \, mod \, p \\ 1 & a \neq 0 \, mod \, p \text{ かつ } x^2 = a \, mod \, p \text{ となる} x \text{ が存在する} \\ -1 & a \neq 0 \, mod \, p \text{ かつ } x^2 = a \, mod \, p \text{ となる} x \text{ が存在しない} \end{cases}$$

ヤコビ記号 $(a|n)$　　$n = {p_1}^{\beta_1} \cdot {p_2}^{\beta_2} \cdot \cdots \cdot {p_m}^{\beta_m}$

$$(a|n) = \underbrace{(a|p_1)^{\beta_1} \cdot (a|p_2)^{\beta_2} \cdot \cdots \cdot (a|p_m)^{\beta_m}}$$

ルジャンドル記号の積

探索版素因数分解問題とその変種

C-FACTORING　入力：合成数 n
出力：n の非自明因子

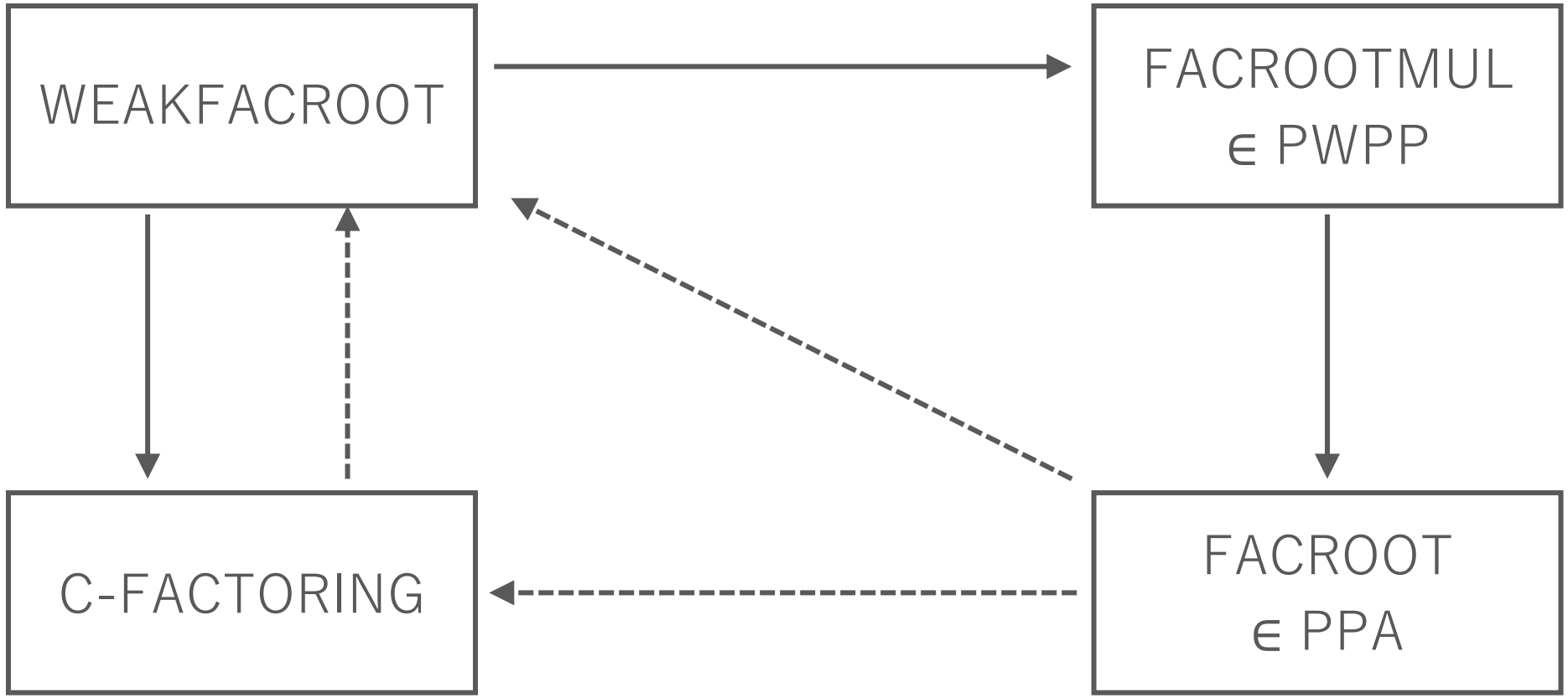
ヤコビ記号 $(a|n)$

WEAKFACROOT　入力：奇数 n，a, b s.t. $(a|n) = 1$，$(b|n) = -1$
出力：n の非自明因子 or a の平方根

FACROOTMUL　入力：奇数 n，a, b s.t. $(a|n) = 1$，$(b|n) = -1$
出力：n の非自明因子 or a の平方根
or b の平方根 or ab の平方根

FACROOT　入力：奇数 n，a s.t. $(a|n) = 1$
出力：n の非自明因子 or a の平方根≈

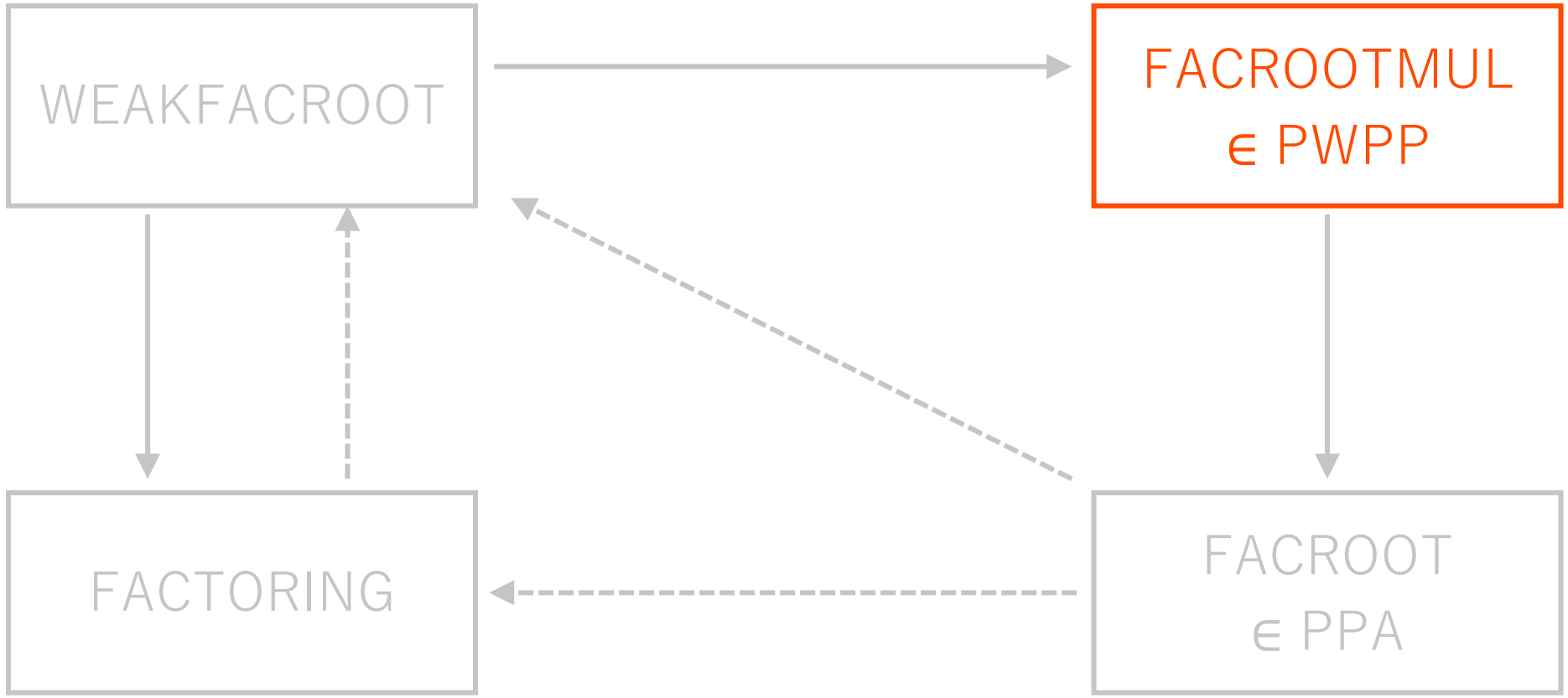
探索版素因数分解問題とその変種の帰着関係



A ⟶ B：AからBへの多項式時間帰着が存在

A ⇢ B：AからBへの多項式時間乱択帰着が存在（GRHで帰着を脱乱化できる）

探索版素因数分解問題とその変種の帰着関係



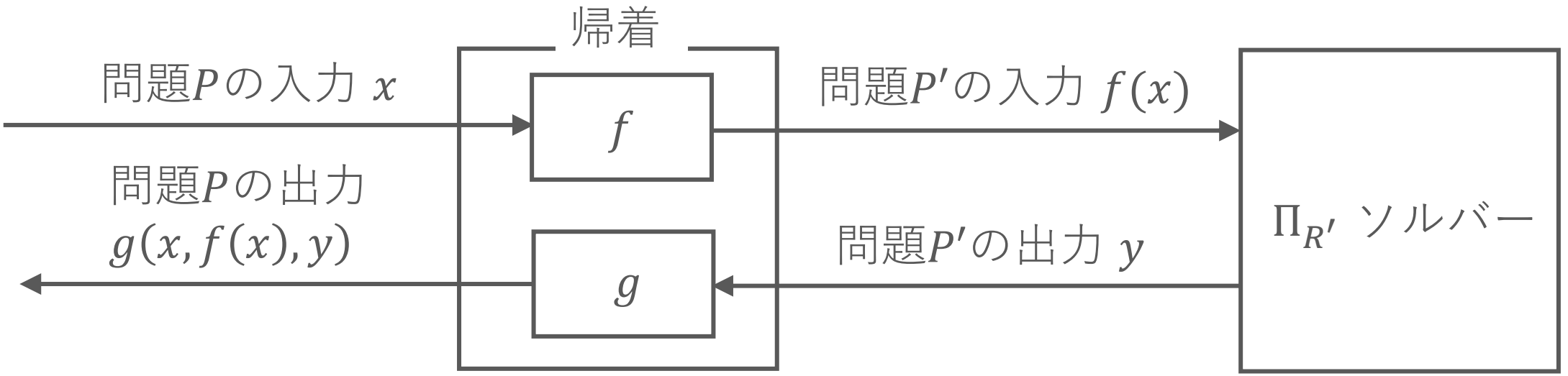
A ⟶ B：AからBへの多項式時間帰着が存在

A ⇢ B：AからBへの多項式時間乱択帰着が存在（GRHで帰着を脱乱化できる）

TFNPの探索問題における多項式時間帰着

TFNPの探索問題PからTFNPの探索問題P'への多項式時間帰着 (f, g)　[SSZ18]

- f, g は多項式時間で計算できる.
- xが探索問題Pの入力なら，　$f(x)$ は探索問題P'の入力である.
- y が問題P'の入力 $f(x)$ の解なら，　$g(x, f(x), y)$ は問題Pの入力 xの解である.

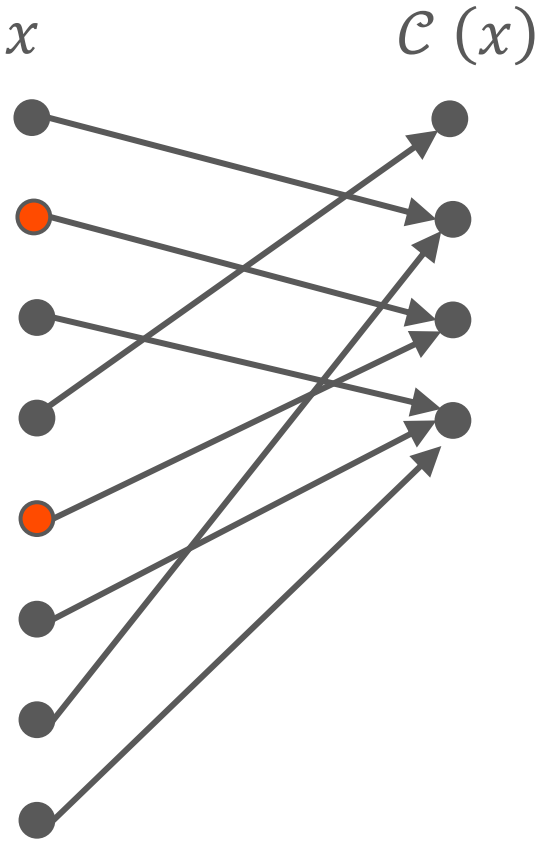


COLLISION問題とクラスPWPP[Jer16]

COLLISION問題

入力：回路 $\mathcal{C}$: $\{0,1\}^n \to \{0,1\}^{n-1}$ s.t. $|\mathcal{C}|$=poly(n),

出力：(x, x') s.t. $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(x')$ かつ $x \neq x'$



探索問題PがPWPPに属するとは，問題PがCOLLISION問題に多項式時間帰着できる.

クラスはPWPPはハッシュ関数の衝突困難性を捉えることができる計算量クラス

FACROOTMUL ∈ PWPP

FACROOTMUL

入力：奇数 n，　a, b s.t. $(a|n) = 1$，　$(b|n) = -1$

出力：n の非自明因子 or a の平方根 or b の平方根

FACROOTMULの入力 (n, a, b) に対し

関数 $h: \{0,1,2\} \times \left[1, \frac{n-1}{2}\right] \longrightarrow [1, n-1]$ を定義する.

$$h: (i, x) = \begin{cases} x & mod\ N \quad if\ GCD(n, x) \neq 1 \\ x^2 & mod\ N \quad if\ GCD(n, x) = 1 \wedge i = 0 \\ ax^2 & mod\ N \quad if\ GCD(n, x) = 1\ \wedge i = 1 \\ bx^2 & mod\ N \quad if\ GCD(n, x) = 1 \wedge i = 2 \end{cases}$$

帰着 f ： (n, a, b)から関数 h を計算する回路 $\mathcal{C}$ ををを構成し，$\mathcal{C}$ を出力する.

FACROOTMUL ∈ PWPP

帰着 g： 回路 $\mathcal{C}$に対するsolution $((i,x),(j\ y))$ s.t. $(i,x) \neq (j,y)$ に対し，

- $GCD(n,x) \neq 1$なら$GCD(n,x)$，　$GCD(n,y) \neq 1$なら$GCD(n,y)$を出力する．
- $i = j$ であれば，$GCD(n, x-y)$ を出力する．
- $a_0 = 1$，　$a_1 = a$，　$a_2 = b$ とする．
- $i < j$，$i = 0$ であれば，　xy^{-1} を出力する．
- $i < j$，$i = 1$であれば，axy^{-1} を出力する．
- $i > j$ のときも同様(略)．

$$h\colon \{0,1,2\} \times \left[1, \frac{n-1}{2}\right] \longrightarrow [1, n-1]$$

$$h\colon (i,x) = \begin{cases} x \mod N & if\ GCD(n,x) \neq 1 \\ x^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 0 \\ ax^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 1 \\ bx^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 2 \end{cases}$$

FACROOTMUL ∈ PWPP

帰着 g： 回路 $\mathcal{C}$に対するsolution $((i,x),(j\ y))$ s.t. $(i,x) \neq (j,y)$ に対し，

- $GCD(n,x) \neq 1$なら$GCD(n,x)$，　$GCD(n,y) \neq 1$なら$GCD(n,y)$を出力する．
- $i = j$ であれば，$GCD(n, x-y)$ を出力する．
- $a_0 = 1$，　$a_1 = a$，　$a_2 = b$ とする．
- $i < j$，$i = 0$ であれば，　xy^{-1} を出力する．
- $i < j$，$i = 1$であれば，axy^{-1} を出力する．
- $i > j$ のときも同様(略)．

$$h\colon \{0,1,2\} \times \left[1, \frac{n-1}{2}\right] \longrightarrow [1, n-1]$$

$$h\colon (i,x) = \begin{cases} x \mod N & if\ GCD(n,x) \neq 1 \\ x^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 0 \\ ax^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 1 \\ bx^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 2 \end{cases}$$

FACROOTMUL ∈ PWPP

帰着 g： 回路 $\mathcal{C}$に対するsolution $((i,x),(j\ y))$ s.t. $(i,x) \neq (j,y)$ に対し，

・$GCD(n,x) \neq 1$なら$GCD(n,x)$，　$GCD(n,y) \neq 1$なら$GCD(n,y)$を出力する．

・$i = j$ であれば，$GCD(n, x-y)$ を出力する．

・$a_0 = 1$，　$a_1 = a$，　$a_2 = b$ とする．

・$i < j$，$i = 0$ であれば，　xy^{-1} を出力する．

・$i < j$，$i = 1$であれば，axy^{-1} を出力する．

・$i > j$ のときも同様(略)．

$i = j$ より，$x \neq y$ である．

$i = j = 0$のとき，
$x^2\ mod\ N = y^2\ mod\ N$ なので
$(x+y)(x-y) mod\ N = 0$

$$h: \{0,1,2\} \times \left[1, \frac{n-1}{2}\right] \longrightarrow [1, n-1]$$

$$h: (i,x) = \begin{cases} x \mod N & if\ GCD(n,x) \neq 1 \\ x^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 0 \\ ax^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 1 \\ bx^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 2 \end{cases}$$

FACROOTMUL ∈ PWPP

帰着 g： 回路 $\mathcal{C}$に対するsolution $((i,x),(j\ y))$ s.t. $(i,x) \neq (j,y)$ に対し，

・$GCD(n,x) \neq 1$なら$GCD(n,x)$，　$GCD(n,y) \neq 1$なら$GCD(n,y)$を出力する．

・$i = j$ であれば，$GCD(n, x-y)$ を出力する．

・$a_0 = 1$，　$a_1 = a$，　$a_2 = b$ とする．

・$i < j$，$i = 0$ であれば，　xy^{-1} を出力する．

・$i < j$，$i = 1$であれば，axy^{-1} を出力する．

・$i > j$ のときも同様(略)．

$i = j$ より，$x \neq y$ である．

$i = j = 1$のとき，
$ax^2 \ mod\ N = \ ay^2 \ mod\ N$ なので
$(x+y)(x-y) mod\ N = 0$

$$h: \{0,1,2\} \times \left[1, \frac{n-1}{2}\right] \longrightarrow [1, n-1]$$

$$h: (i,x) = \begin{cases} x \quad mod\ N \quad if\ GCD(n,x) \neq 1 \\ x^2 \quad mod\ N \quad if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 0 \\ ax^2 \quad mod\ N \quad if\ GCD(n,x) = 1 \ \wedge i = 1 \\ bx^2 \quad mod\ N \quad if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 2 \end{cases}$$

FACROOTMUL ∈ PWPP

帰着 g： 回路 $\mathcal{C}$に対するsolution $((i,x),(j\ y))$ s.t. $(i,x) \neq (j,y)$ に対し，

・$GCD(n,x) \neq 1$なら$GCD(n,x)$，　$GCD(n,y) \neq 1$なら$GCD(n,y)$を出力する．

・$i = j$ であれば，$GCD(n, x-y)$ を出力する．

・$a_0 = 1$，　$a_1 = a$，　$a_2 = b$ とする．

・$i < j$，$i = 0$ であれば，　xy^{-1} を出力する．

・$i < j$，$i = 1$であれば，axy^{-1} を出力する．

・$i > j$ のときも同様(略)．

$i = j$ より，$x \neq y$ である．

$i = j = 2$のとき，
$bx^2\ mod\ N = by^2\ mod\ N$ なので
$(x+y)(x-y) mod\ N = 0$

$$h: \{0,1,2\} \times \left[1, \frac{n-1}{2}\right] \longrightarrow [1, n-1]$$

$$h: (i,x) = \begin{cases} x \mod N & if\ GCD(n,x) \neq 1 \\ x^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 0 \\ ax^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 1 \\ bx^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 2 \end{cases}$$

FACROOTMUL ∈ PWPP

帰着 g： 回路 $\mathcal{C}$に対するsolution $((i,x),(j\ y))$ s.t. $(i,x) \neq (j,y)$ に対し，

- $GCD(n,x) \neq 1$なら$GCD(n,x)$，　$GCD(n,y) \neq 1$なら$GCD(n,y)$を出力する．
- $i = j$ であれば，$GCD(n, x-y)$ を出力する．
- $a_0 = 1,\quad a_1 = a,\quad a_2 = b$ とする．
- $i < j,\ i = 0$ であれば，xy^{-1} を出力する．
- $i < j,\ i = 1$であれば，axy^{-1} を出力する．
- $i > j$ のときも同様(略)．

$a_0 x^2 \ mod\ N = a_j y^2 \ mod\ N$ より
$a_j = (xy^{-1})^2 \ mod\ N$

xy^{-1} は a or bの平方根

$$h: \{0,1,2\} \times \left[1, \frac{n-1}{2}\right] \longrightarrow [1, n-1]$$

$$h: (i,x) = \begin{cases} x & mod\ N \quad if\ GCD(n,x) \neq 1 \\ x^2 & mod\ N \quad if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 0 \\ ax^2 & mod\ N \quad if\ GCD(n,x) = 1 \ \wedge i = 1 \\ bx^2 & mod\ N \quad if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 2 \end{cases}$$

FACROOTMUL ∈ PWPP

帰着 g： 回路 $\mathcal{C}$に対するsolution $((i,x),(j\ y))$ s.t. $(i,x) \neq (j,y)$ に対し，

- $GCD(n,x) \neq 1$なら$GCD(n,x)$，　$GCD(n,y) \neq 1$なら$GCD(n,y)$を出力する．
- $i = j$ であれば，$GCD(n, x-y)$ を出力する．
- $a_0 = 1$，　$a_1 = a$，　$a_2 = b$ とする．
- $i < j$，$i = 0$ であれば，　xy^{-1} を出力する．
- $i < j$，$i = 1$であれば，axy^{-1} を出力する．
- $i > j$ のときも同様(略)．

$a_i x^2 \ mod\ N = a_j y^2 \ mod\ N$ より
$ba^{-1} = (xy^{-1})^2 \ mod\ N$

$ba^{-1}a^2 = (axy^{-1})^2$ より
axy^{-1} は abの平方根

$$h\colon \{0,1,2\} \times \left[1, \frac{n-1}{2}\right] \longrightarrow [1, n-1]$$

$$h\colon (i,x) = \begin{cases} x \ \ mod\ N & if\ GCD(n,x) \neq 1 \\ x^2 \ \ mod\ N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 0 \\ ax^2 \ \ mod\ N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 1 \\ bx^2 \ \ mod\ N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 2 \end{cases}$$

FACROOTMUL ∈ PWPP

帰着 g： 回路 $\mathcal{C}$に対するsolution $((i,x),(j\ y))$ s.t. $(i,x) \neq (j,y)$ に対し，

・$GCD(n,x) \neq 1$なら$GCD(n,x)$，　$GCD(n,y) \neq 1$なら$GCD(n,y)$を出力する．

・$i = j$ であれば，$GCD(n, x-y)$ を出力する．

・$a_0 = 1$，　$a_1 = a$，　$a_2 = b$ とする．

・$i < j$，$i = 0$ であれば，　xy^{-1} を出力する．

・$i < j$，$i = 1$であれば，axy^{-1} を出力する．

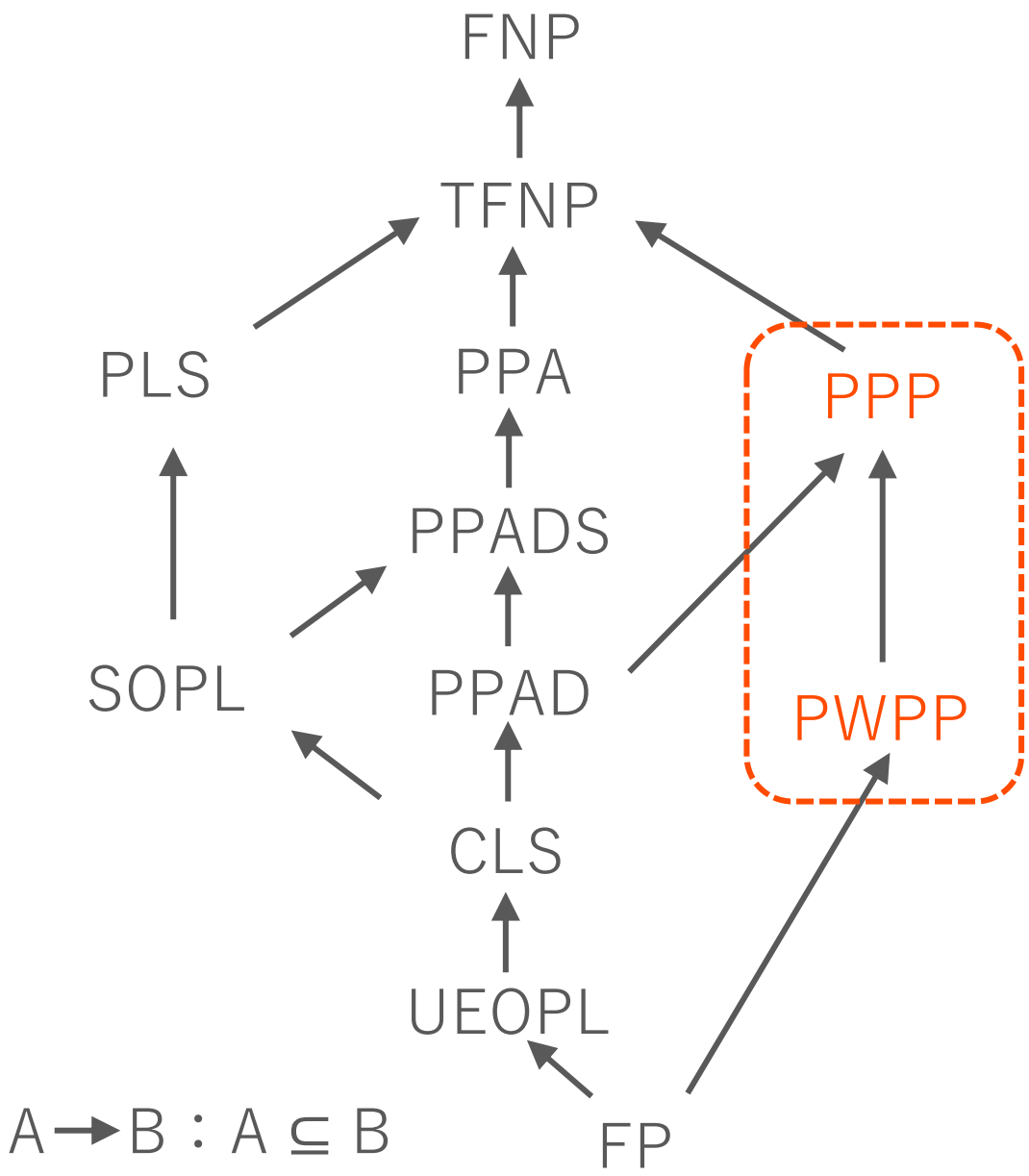
・$i > j$ のときも同様(略)．

$$h\colon \{0,1,2\} \times \left[1, \frac{n-1}{2}\right] \longrightarrow [1, n-1]$$

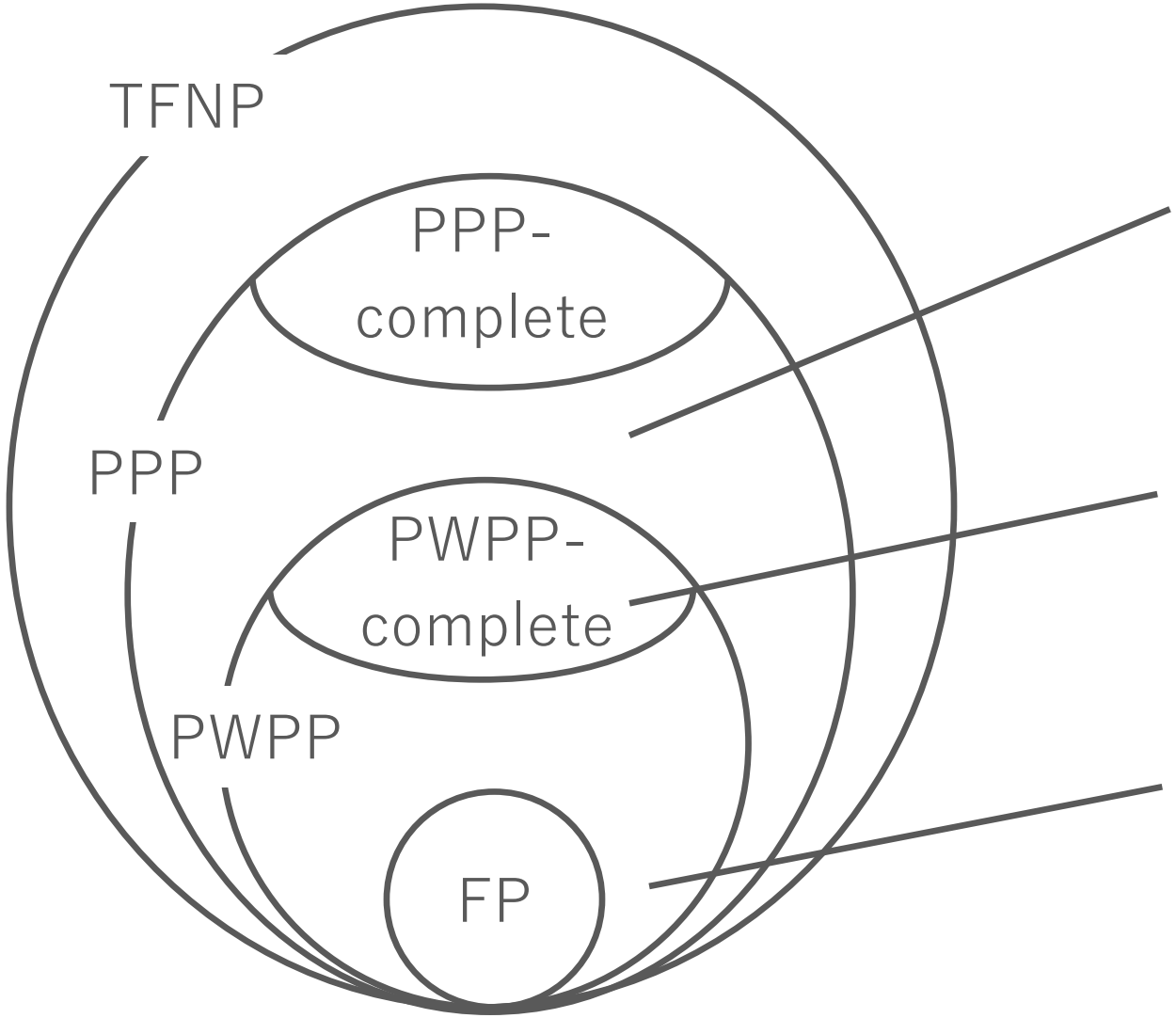
$$h\colon (i,x) = \begin{cases} x \mod N & if\ GCD(n,x) \neq 1 \\ x^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 0 \\ ax^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 1 \\ bx^2 \mod N & if\ GCD(n,x) = 1 \wedge i = 2 \end{cases}$$

暗号に関する探索問題とクラスPPP，PWPP

クラスPPP，PWPPと暗号に関連する探索問題



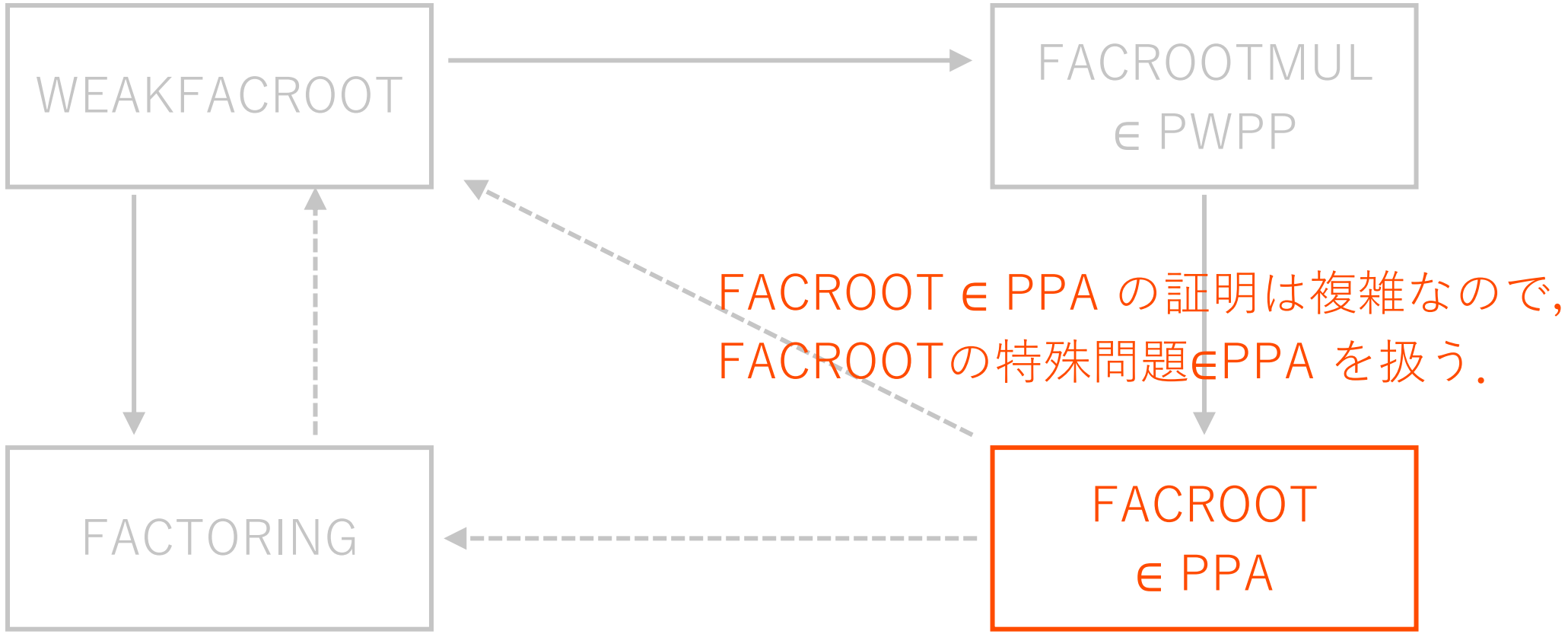
クラスPPP，PWPPと暗号に関連する探索問題



- SVP，CVP
- DL [HV21](MFCS2021)
- FACTORING [Jer16]
- SIS [SZZ18](FOCS2018)

FACROOT $\in$ PPAの証明[Jer16]について

探索版素因数分解問題とその変種の帰着関係



A ⟶ B：AからBへの多項式時間帰着が存在

A ⇢ B：AからBへの多項式時間乱択帰着が存在（GRHで帰着を脱乱化できる）

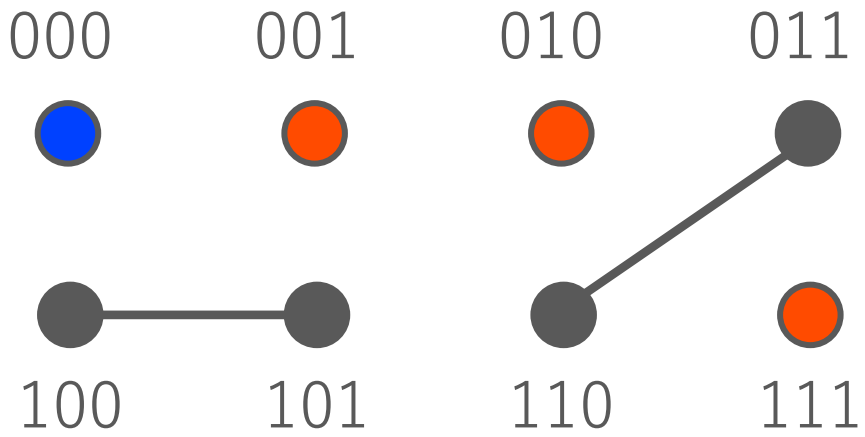
再掲： LONELY問題[BCE+95]とクラスPPA[Pap94]

LONELY　入力：無向グラフ$G=(V,E)$ を表す回路 $\mathcal{C}_{lon}\colon\{0,1\}^n\to\{0,1\}^n$,

$|\mathcal{C}_{lon}|=\mathrm{poly}(n)$, $V=\{0,1\}^n\setminus\{0^n\}$,

$(u,v)\in E$ iff $u\neq v\wedge\mathcal{C}_{lon}(u)=v\wedge\mathcal{C}_{lon}(v)=u$

出力： 0^n 以外のマッチングがない頂点



$\mathcal{C}_{lon}(100)=101,\ \mathcal{C}_{lon}(101)=100$

$\mathcal{C}_{lon}(001)=101,\ \mathcal{C}_{lon}(111)=111$

頂点100 と101 はマッチする

頂点101 と101 はマッチしない

頂点101 がない.

探索問題PがクラスPPAに属するとは,

問題PからLONELY問題への

多項式時間帰着が存在する.

FACROOTa

FACROOTa　　入力：奇数 n，　a s.t. $(a|n) = 1$
出力：n の非自明因子 or a の平方根

以降は証明のための準備

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ の要素を $N = \{x \mid |x| < n/2,\ GCD(n, x) = 1\}$

で一意に表現する.

$N^+ = \{x \in N \mid x > 0\}$,　$N^- = \{x \in N \mid x > 0\}$,　$N_0 = N^+ \cup \{0\}$

準備：対合写像 $s_{n,a}$

写像 $f: X \to Y$ が対合写像とは,

$\forall x \in X$ に対し，$f\big(f(x)\big) = x$ が成り立つ.

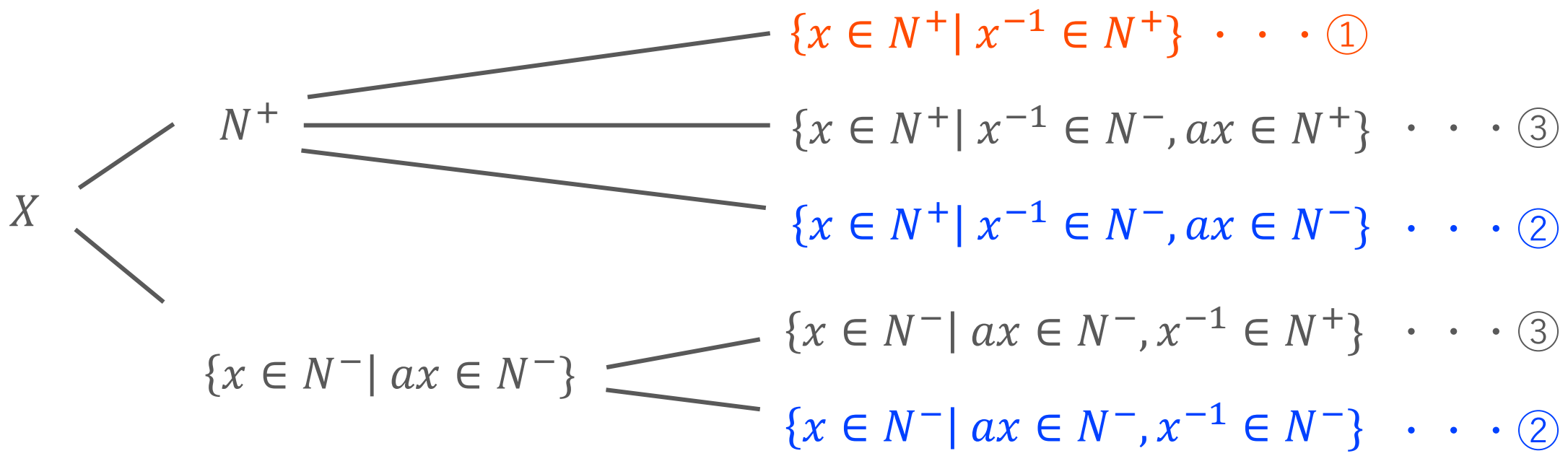
次の対合写像 $s_{n,a}(x)$　$X = \{x \in N^- \mid ax \in N^-\} \cup N^+$ を考える.

$$s_{n,a}(x) = \begin{cases} x^{-1} & x, x^{-1} \in N^+ \\ a^{-1}x^{-1} & ax, x^{-1} \in N^- \\ -x & (x, ax \in N^+ \wedge x^{-1} \in N^-) \vee (x, ax \in N^- \wedge x^{-1} \in N^+) \end{cases}$$

準備：対合写像 $s_{n,a}$

$$s_{n,a}(x)=\begin{cases} x^{-1} & x, x^{-1}\in N^{+} \cdots ① \\ a^{-1}x^{-1} & ax, x^{-1}\in N^{-} \cdots ② \\ -x & (x, ax\in N^{+}\wedge x^{-1}\in N^{-})\vee(x, ax\in N^{-}\wedge x^{-1}\in N^{+}) \cdots ③ \end{cases}$$

$X=\{x\in N^{-}\mid ax\in N^{-}\}\cup N^{+}$ は $s_{n,a}$ によって3つに分割される.



準備：対合写像 $s_{n,a}$の不動点

$$s_{n,a}(x) = \begin{cases} x^{-1} & x, x^{-1} \in N^+ \cdots ① \\ a^{-1}x^{-1} & ax, x^{-1} \in N^- \cdots ② \\ -x & (x, ax \in N^+ \wedge x^{-1} \in N^-) \vee (x, ax \in N^- \wedge x^{-1} \in N^+) \cdots ③ \end{cases}$$

$s_{n,a}(x)$ の不動点 x_{fix}は次の(1)，(2)のうちどちらかの条件を満たす．

(1)　$x_{fix} \in N^+ \setminus \{1\} \wedge {x_{fix}}^2 = 1$　　① のときに対応する不動点

(2)　$x_{fix} \in N^- \wedge {x_{fix}}^2 = a^{-1}$　　② のときに対応する不動点

③のときに対応する不動点は存在しない．

準備：対合写像 $t_{n,a}$

s(x) の定義域は $X = \{x \in N^- | \, ax \in N^-\} \cup N^+$

$t_{n,a}(x)$ を修正して，定義域が $X \cup \{0\}$ の対合写像$f_{n,a}(x)$を構成する.

$$t_{n,a}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x = 1 \\ t_{n,a}(x) & x \neq 0, 1 \end{cases}$$

この関数をFACROOTa からLONELY への帰着で用いる.

FACROOT2 ∈ PPA

FACROOT2　　入力：奇数 n,　s.t. $(2|n) = 1$
　　出力：n の非自明因子 or a の平方根

平方剰余の法則

$$(2|n) = \begin{cases} 1 & n = \pm 1 \mod 8 \\ -1 & n = \pm 3 \mod 8 \end{cases}$$

以降 $n = \pm 1 \mod 8$ として考える.

FACROOT2 ∈ PPA　対合写像hの構成

$n = \pm 1 \mod 8$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ の要素を $N = \{x \mid |x| < n/2,\ GCD(n,x) = 1\}$

$N^+ = \{x \in N \mid x > 0\}$,　$N^- = \{x \in N \mid x > 0\}$,　$N_0 = N^+ \cup \{0\}$

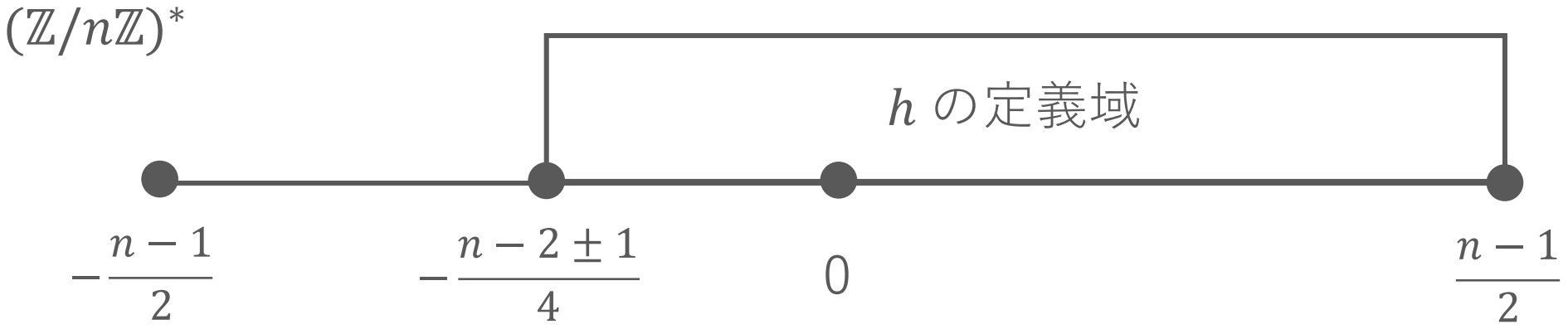
$$\{x \in N^- \mid 2x \in N^-\} = N \cap \left[-\frac{n-2\pm1}{4}, \frac{n-1}{2}\right]$$

定義域が $\left[-\frac{n-2\pm1}{4}, \frac{n-2}{2}\right]$ の対合写像$h(x)$を次のように構成する.

$$h(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \ \wedge GCD(n,x) \neq 1 \\ f_{n,2}(x) & \text{Othrwise} \end{cases}$$

FACROOT2 ∈ PPA　対合写像hの構成

$$h(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \ \wedge GCD(n,x) \neq 1 \\ f_{n,2}(x) & \text{Othrwise} \end{cases} \qquad x \in \left[-\frac{n-2\pm1}{4}, \frac{n-1}{2}\right]$$



FACROOT2 ∈ PPA　対合写像hの不動点

$h(x)$ の不動点 x_{fix}は次の(1)，(2)，(3)のうちどちらかの条件を満たす．

$$h(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \ \wedge GCD(n,x) \neq 1 \quad \cdots ① \\ t_{n,2}(x) & \text{Othrwise} \quad \cdots ② \end{cases}$$

(1)　$x_{fix} \neq 0 \ \wedge GCD(n, x_{fix}) \neq 1$　　① のときに対応する不動点

(2)　$x_{fix} \in N^{+} \setminus \{1\} \wedge {x_{fix}}^2 = 1$　　② のときに対応する不動点

(3)　$x_{fix} \in N^{-} \wedge {x_{fix}}^2 = 2^{-1}$　　② のときに対応する不動点

(1)または(2)の不動点が計算できればnの非自明因子が得られる．

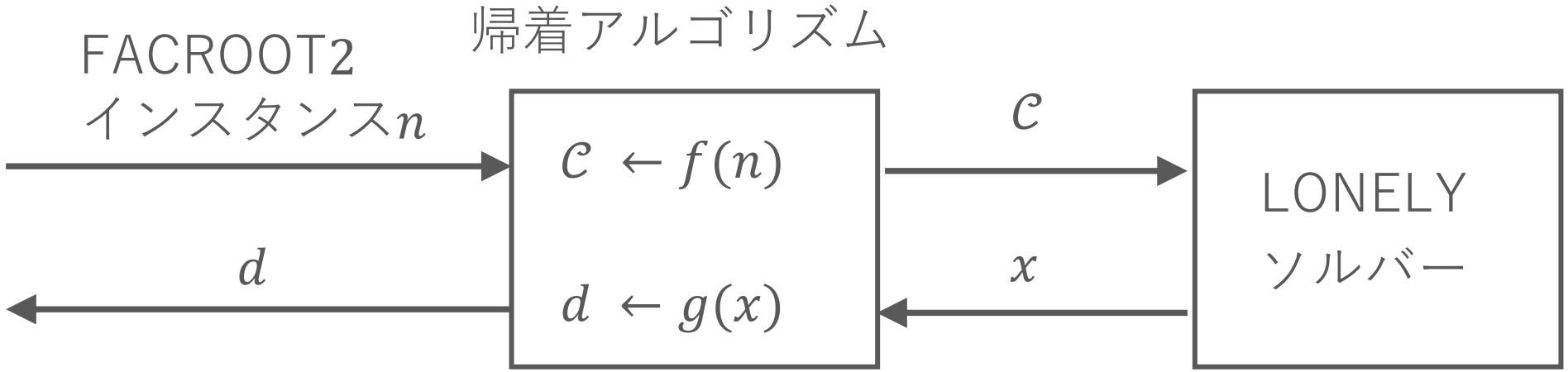
(3)の不動点が計算できれば，$a = 2$ の平方根が得られる．

hの不動点が計算できれば FACROOT2が解ける！

FACROOT2 ∈ PPA

帰着 f ：奇数 n から関数 h を計算する回路 $\mathcal{C}$ を出力する.

帰着 g ： xが不動点が(1)または(2)のタイプなら
n の非自明因子を計算し出力する.
xが不動点が(3)のタイプなら 2の平方根を計算し出力する.



LONELYソルバーの出力が不動点であることを確認する必要あり.

FACROOT2 ∈ PPA

$h(x)$の定義域は $\left[-\frac{n-2\pm1}{4}, \frac{n-1}{2}\right]$， $n = \pm1 \mod 8$ であることに着目すると，

この区間に含まれる整数 $(3n \pm 1)/4$ 個で奇数個.

さらに $h(x)$ 対合写像なので，マッチングがない点はhの不動点である.

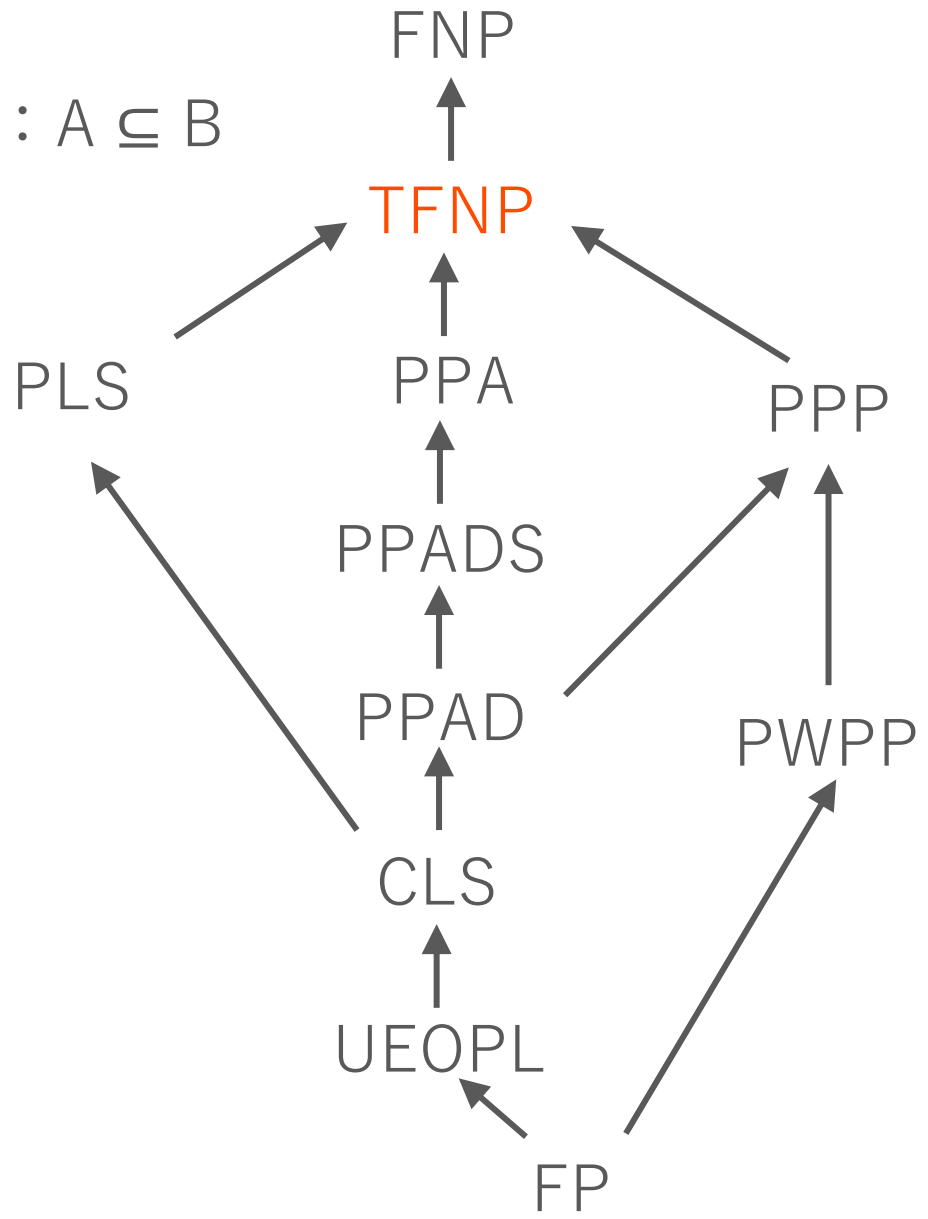
FACROOT ∈ PPAの証明についても
帰着fは対合写像を構成し，帰着gでその写像の不動点を解へ変換する.

FACROOTでは帰着fが構成する対合写像の構造は複雑である.
詳しい証明は[Jer16]を参照のこと.

TNFPの困難性と暗号技術について

TFNPに困難な問題が存在することの証明について

A→B：A ⊆ B



TNFPに解くことが難しい問題が
存在することをどの仮定から証明できる？

[HNY17]

NPに平均ケースで解くことが難しい
言語が存在 (Pessilandの世界)

TFNPに平均ケースで解くことが
難しい問題が存在

TFNPに困難な問題が存在することの証明について

Impagliazzoの5つの世界[Imp95]

Cryptomania：公開鍵暗号が存在する世界

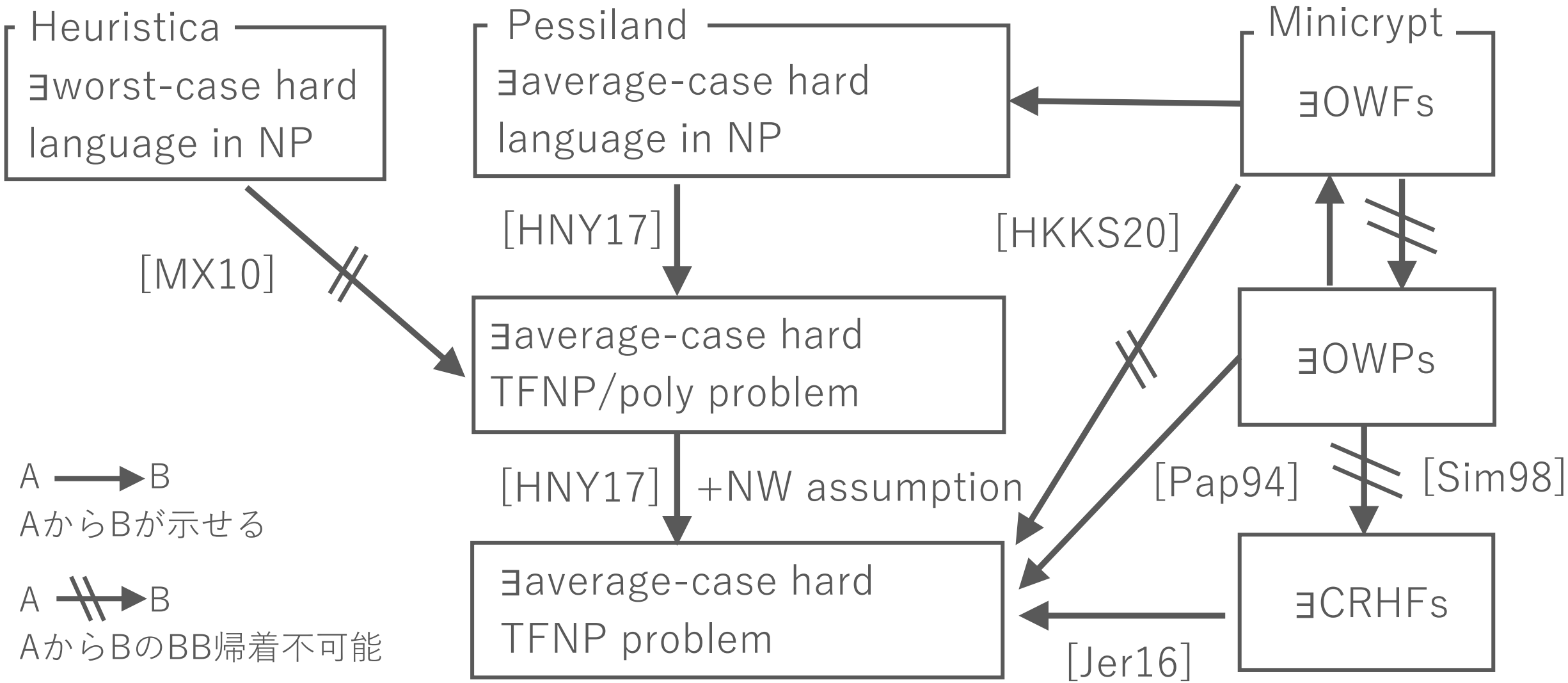
Minicrypt：公開鍵暗号が存在しないが
一方向性関数が存在する世界

Pessiland：一方向性関数が存在しないが
平均ケースで困難なNP言語が存在する世界

Heuristica：平均ケースで困難なNP言語が存在しないが
P≠NPが成り立つ世界

Algorithmica：P=NPが成り立つ世界

TFNPに困難な問題が存在することの証明について



TFNPの困難性を用いて暗号技術は構成可能か？

TFNPから一方向性関数は構成可能か？

TFNPの平均ケース困難性を用いても
一方向性関数をブラックボックス構成できない.

PPADの困難性(TFNPの困難性より強い仮定)から一方向性関数は構成可能か？

PPADの平均ケース困難性を用いても
一方向性関数をブラックボックス構成できない. [RSS17]

TFNP関連研究に役立つ資料

暗号とTFNPに特化した講義（本スライド作成時にも参考にしました．）

COMS E6261: Advanced Cryptography Spring 2024: Cryptography ∩ TFNP
https://dmitropolsky.github.io/teaching/6261/

FNPの上位クラスPEPPに関連する話題

明示的構成の計算量と値域回避問題
Complexity of Explicit Constructions and Range Avoidance Problems
https://tcc.c.titech.ac.jp/yasunaga/talks/rangeavoidance_IMI202208.pdf

参考文献

[BCE+95] Paul Beame, Stephen A. Cook, Jeff Edmonds, Russell Impagliazzo, Toniann Pitassi. The relative complexity of NP search problems (STOC1995).
[BHZ87] Ravi B. Boppana, Johan Hastad, Stathis Zachos. Does co-NP Have Short Interactive Proofs? (Inf. Process. Lett. 1987).
[DP11] Constantinos Daskalakis, Christos H. Papadimitriou. Continuous Local Search (SODA2011).
[FGHS21] John Fearnley, Paul W. Goldberg, Alexandros Hollender, Rahul Savani. The complexity of gradient descent: CLS = PPAD∩PLS (STOC2021).
[FGMS19] John Fearnley, Spencer Gordon, Ruta Mehta, Rahul Savani. Unique End of Potential Line. (ICALP2019)
[GHJ+22] Mika Goos, Alexandros Hollender, Siddhartha Jain, Gilbert Maystre , William Pires, Robert Robere, Ran Tao. Further Collapses in TFNP (CCC22).
[GKRS19] Mika Goos, Pritish Kamath, Robert Robere, Dmitry Sokolov. Adventures in Monotone Complexity and TFNP (ITCS2019).
[HKKS20] Pavel Hubacek, Chethan Kamath, Karel Kral, Veronika Slivova. On Average-Case Hardness in TFNP from One-Way Functions (TCC2020).
[HMR23] Prahladh Harsha, Daniel Mitropolsky, Alon Rosen. Downward Self-Reducibility in TFNP (ITCS2023).
[HNY17] Pavel Hubacek, Moni Naor, Eylon Yogev. The Journey from NP to TFNP Hardness (ITCS2017).

参考文献

[HV21] Pavel HubacekThe Journey from NP to TFNP Hardness and Jan Vaclavek. On Search Complexity of Discrete Logarithm (MFCS2021).
[Imp95] Russell Impagliazzo. A Personal View of Average-Case Complexity (SCT1995).
[Jer16] Emil Jerabek. Integer factoring and modular square roots (J. Comput. Syst. Sci. 2016).
[JPY85] David S. Johnson, Christos H. Papadimitriou, Mihalis Yannakakis. How Easy Is Local Search? (Extended Abstract) (FOCS1985).
[MP91] Nimrod Megiddo and Christos H. Papadimitriou. On Total Functions, Existence Theorems and Computational Complexity (Theor. Comput. Sci. 1991).
[MX10] Mohammad Mahmoody, David Xiao. On the Power of Randomized Reductions and the Checkability of SAT (CCC2010).
[Pap94] Christos H. Papadimitriou. On the Complexity of the Parity Argument and Other Inefficient Proofs of Existence (J. Comput. Syst. Sci. 1994).
[Sim98] Daniel R. Simon. Finding Collisions on a One-Way Street: Can Secure Hash Functions Be Based on General Assumptions? (EUROCRYPT1998).
[SZZ18] Katerina Sotiraki, Manolis Zampetakis, Giorgos Zirdelis. PPP-Completeness with Connections to Cryptography (FOCS2018).
[GQ21] Joshua A. Grochow and Youming Qiao. On the Complexity of Isomorphism Problems for Tensors, Groups, and Polynomials I: Tensor Isomorphism-Completeness (ITCS2021).